PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

A.Các phương trình cơ bản:

I)Phương trình bậc nhất hai ẩn:

Định nghĩa: ax + by = c với a, b, c là các số nguyên cho trước

Đinh lí: Giả sử a ,b là xác số nguyên dương và d= (a, b) khi đó (1) vô nghiệm nếu c d và vô số nghiệm nếu c d

Hơn nữa nếu (x_0, y_0) là nghiệm của (1) thì phương trình có nhiệm tổng quát (x,y)=$\left(x_0 + \frac{b}{d}n, y_0 + \frac{a}{d}n\right)$

Chứng minh :giành cho bạn đọc

Ví dụ1: Giải phương trình nhiệm nguyên: $21x + 6y = 1988$.

Giải: Ta có $7x + 2y = \frac{1988}{3} \Rightarrow$ không tồn tại x,y$\in Z$ thỏa 7x + 2y không nguyên

Ví dụ 2: Giải phương trình nhiệm nguyên: 12x+3y=216

Giải:Ta có $x = \frac{216 - 3y}{12} = 18 - \frac{y}{4} \Rightarrow y = 4n \Rightarrow x = 18 - n(n \in Z)$

II) Phương trình PITAGO:

Định nghĩa: $x^2 + y^2 = z^2$

Định lí:

1. $(x, y, z) = 1 \Rightarrow (x, y) = (y, z) = (z, x) = 1$
2. $(x, y, z) = 1 \Rightarrow$ x,y khác tính chẵn , lẻ
3. $\begin{cases} (r, s) = 1 \\ rs = k^2 \end{cases}$ thì $r = t^2, s = h^2$

Chứng minh:Giành cho bạn đọc xem như một bài tập

Giải phương trình PITAGO:

Giả sử $(x, y, z) = d \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}\right) = 1$

Theo định lí 1 ta có thể giả sử y_0 chẵn

Ta có: $x_0^2 + y_0^2 = z_0^2 \Rightarrow y_0^2 = (z_0 - x_0)(z_0 + x_0)$

Theo đ ịnh lí 2:$\left(\left(\frac{z_0 + x_0}{2}\right), \left(\frac{z_0 - x_0}{2}\right)\right) = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_0 + x_0 = 2m^2 \\ z_0 - x_0 = 2n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = m^2 - n^2 \\ y_0 = 2mn \\ z_0 = m^2 + n^2 \end{cases}$

với m,n là các số nguyên

B.Các phương trình không mẫu mực:

Chúng ta đã làm quen những phương trình nghiệm nguyên cơ bản nhất và lâu đời nhất trong toán học.Nhưng cũng như mọi lĩnh vực khác trong toán học phương trìng nhiệm nguyên ngày càng phát triển, càng khó . Điển hình là phương trình $x^n + y^n = z^n$ mãi đến gần đây người ta mới giải được nhưng phải dùng đến những kiến thức toán cao cấp và lời thì vô cùng sâu sắc,

Tuy nhiên nếu chỉ xét các bài toán ở phổ thông thì chúng ta có thể đúc kết ba phương pháp cơ bản nhất

1) Sử dụng các tíng chất của số nguyên ,các định lí của số học

2) Sử dụng bất đẳng thức để thu hẹp miền giá trị của tập nghiệm, sau đó có thể thế từng giá trị

3)Phương pháp lùi vô hạn ,phương pháp náy do FERMAT sáng tạo ra khi giải phương trình

1/ Sử dụng các tíng chất của số nguyên ,các định lí của số học

a/Đưa về dạng tích:

Ý tưởng của b ài to án l à đ ưa v ề d ạng $f_1(x,y,...)f_2(x,y.....)....f_n(x,y,...) = a_1a_2...a_n$ v ới $a_1,a_2,...,a_n \in Z$ .Rồi xét mọi trường hợp có thể

Ví dụ: Giải phương trình nhiệm nguyên d ương: 21 x + 6 y + 1 xy = 123

Giải: $y(6+21x)+(21x+6)=129 \Rightarrow (21x+6)(y+1)=129$ =43.3

$\Rightarrow 21x+6=43$ và y+1=3

hay 21x+6=3 v à y+1=43

T ất cả đều cho ta kết quả vô nghiệm

Ví dụ: Giải phương trình nhiệm nguyên không âm: $x^2+x+1=y^2$ (1)

Giải: $(1) \Rightarrow 4y^2-(2x+1)^2=3 \Rightarrow (2y-2x-1)(2y+2x+1)=3 \Rightarrow \begin{cases} 2y-2x-1=1 \\ 2y+2x+1=3 \end{cases}$

Do 2y-2x-1 và 2y+2x+1 đều lẻ$\Rightarrow y=1 \Rightarrow x=0$

V ậy ph ương trình có nghiệm (x,y)=(1,0)

b/Đưa về dạng tổng:

Ý t ư ởng là đ ưa v ề $f_1^{k_1}(x,y,..)+f_2^k(x,y..)+....+f_n^k(x,y,...)=a_1^k+a_2^k+a_3^k+...+a_n^k$ với k, $a_1^k+a_2^k+....+a_n^k \in Z$

Ví dụ: Giải phương trình nhiệm nguyên d ương: $2x^2+y^2+2xy=25$ (1)

Giải: $(1) \Rightarrow x^2+(x+y)^2=25=3^2+4^2 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

Ví dụ :Giải phương trình nhiệm nguyên không âm $x^2+y^3-3y^2=65-3y(1)$

Giải: $(1) \Rightarrow x^2+(y-1)^3=64=0^2+4^3=8^2+0^3 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y-1=4 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=8 \\ y-1=0 \end{cases}$

V ậy $(x,y)=(0;5);(8;1)$

c/Đưa về dạng phân số: :

Ý t ư ơng b ài to án l à : $\dfrac{f(x,y...)}{g(x,y...)}=\dfrac{a}{b}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+.....\cfrac{1}{a_n}}}$

<u>Ví dụ:</u>Gi ải phương trình nghiệm nguyên $31(xyzt+xy+xt+zt+1)=40(yzt+y+t)$ (1)

Gi ải(1 $\Rightarrow \dfrac{40}{31}=\dfrac{xyzt+xy+xt+zt+1}{yzt+y+t}\Leftrightarrow x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z+\cfrac{1}{t}}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=3\\z=2\\t=4\end{cases}$

d/Sửdụng tính chia hết

<u>Ví dụ:</u> Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2+x(y-2)+3-y=0$(1)

<u>Giải:</u>

$(1)\Rightarrow y=\dfrac{x^2+2x+3}{x+1}=x+1+\dfrac{2}{x+1}\Rightarrow 2\mid(x+1)\Rightarrow x+1\in\{-1,1,-2,2\}$

$\Rightarrow x\in\{-2,0,-3,1\}\Rightarrow (x,y)=(-2,-3),(0,3),(-3,-3),(1,3)$

<u>Ví dụ:</u>Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $3^x+4^y=5^z$

Giải:

X ét theo modulo 3

$5^z\equiv(-1)^z(\text{mod}\,3)\Rightarrow 4^y\equiv(-1)^z(\text{mod}\,3)\Rightarrow$ z ch ẵn , đ ặt z= $2h$

Suy ra $(5^h-2^y)(5^h+2^y)=3^x$. Do $5^h-2^y, 5^h+2^y$ không đồng thời chia h ết cho 3

n ên $\begin{cases}5^h+2^y=3^x\\5^h-2^y=1\end{cases}$

Ta có: $5^h+2^y\equiv(-1)^h+(-1)^y\equiv 0(\text{mod}\,3)$ và $5^h-2^y\equiv(-1)^h+(-1)^y\equiv 1(\text{mod}\,3)\Rightarrow$ h lẻ ,y chẵn

Nếu y>2 thì $5^h+2^y\equiv 1(\text{mod}\,4)\Rightarrow 3^x\equiv 1(\text{mod}\,4)\Rightarrow x$ chẵn $\Rightarrow 3^x\equiv 1(\text{mod}\,8)$

Ta có :$5\equiv 5^h+2^y(\text{mod}\,8)$ do h lẻ $\Rightarrow 5\equiv 3^x(\text{mod}\,8)\Rightarrow 5\equiv 1(\text{mod}\,8)$

$\Rightarrow$ vô lí

Do đó y=2 $\Rightarrow x=2, y=2$

<u>Ví dụ:</u> Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3+y^3=21xy+6$ (1)

Giải: $(1)\Rightarrow(x+y)^3=3xy(x+y)+21xy+6$

Đặt a=x+y và b=xy ta c ó $3b=\dfrac{a^3-6}{a+7}=a^2-7a+49-\dfrac{349}{a+7}\Rightarrow 349\,\vdots\, a+7$

Bạn đọc có thể tự giải tiếp

e/Sử dụng tính số nguyên t ố

Định lí 1: $x^2+y^2 \vdots p=4k+3$ ngu ên tố thì $\begin{cases} x \vdots p \\ y \vdots p \end{cases}$

Chứng minh : Theo định lí Fermat ta có:

Ví dụ: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2+5=y^3$

Nhận xét 1: x,y khác tính chẵn lẻ

Nhận xét 2: nếu x lẻ thì $\mathrm{x}^2-1 \vdots 8$

Thực vậy ta có

$x=2k+1, k\in Z$

$\Rightarrow x^2-1=4k(k+1) \vdots 8$

(do $k(k+1) \vdots 2$)

Nhận xét 3: $y^3-6 \not\vdots 8, \forall y.$

Ta quay lại bài toán.

Nếu x lẻ thì $x^2-1 \vdots 8 \Rightarrow y^3-6 \vdots 8 \Rightarrow$ vô lí

Nếu x chẵn thì y lẻ $\Rightarrow x^2+4=(y-1)(y^2+y+1)$

Ta thấy x^2+4 không có ướcnguyên tố dạng $4k+3$ theo định lý 1. Suy ra $y-1$ có dạng $4k+1$, nghĩa là $y^2+y+1-3 \vdots 4 \Rightarrow y^2+y+1=4t+3 \Rightarrow y^2+y+1$ có ước nguyên tố là $4k+3$. Từ đây ta có điều mâu thuẫn.

Như vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài tập tương tự: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2=y^3+7$

2/Sử dụng bất đẳng thức để thu hẹp miền giá trị của tập nghiệm, sau đó có thể thế từng giá trị

Ví dụ 2 :Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $a+b+c=abc$

Ta thấy bậc của vế phải lớn hơn bậc của vế trái nên khi a,b,c đủ lớn thì abc sẽ lớn hơn a+b+c. Điều này hướng cho ta đến việc sử dụng bất đẳng thức.

Nhận xét thêm rằng a,b,c có vai trò như nhau nên ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$.

Nếu $c\ge 2$, suy ra $a+b=c(ab-1)\ge 2ab-2$ (do $c\ge 2, ab\ge c^2>1$)

$\Leftrightarrow a=b(2a-1)-2\ge 2(2a-1)-2=4a-4 \Rightarrow \frac{4}{3}\ge a\ge c\ge 2 \Rightarrow$ vô lí

$$a+b+1=ab \Rightarrow (a-1)(b-1)=2$$

Do đó $c=1$. Suy ra $\Rightarrow \begin{cases} b-1=1 \\ a-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=3 \end{cases}$

Vậy $(a,b,c)=(3,2,1)$ và các hoán vị.

Ví dụ 1: Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^2=x^2(x^2+x+1)+(x+1)^2$

Giải:

Nhận xét rằng $\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 < y^2 < \left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)^2$

Nếu x lẻ, rõ ràng không tồn tại (x,y) nguyên thoả phương trình.

Nếu x chẵn, suy ra $y=x^2+\frac{x}{2}+1$. Đến đây bạn có thể tự giải dễ dàng **J**.

Ví dụ 3: Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $x^2+xy+y^2=x^2y^2$.

Giải:

Từ phương trình ta có: $(x+y)^2=xy\left(xy+1\right)\Rightarrow x^2y^2<(x+y)^2<(xy+1)^2$

Từ đây ta có điều mâu thuẫn vì $\left(x+y\right)^2$ nằm giữa hai số chính phương liên tiếp.

Như vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 4: Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $\frac{x}{y+21}+\frac{y}{27}+\frac{6}{x+y}+\frac{21}{x+6}=\frac{2}{z}$.

Do z nguyên dương nên $\frac{2}{z}\le 2$. (1)

Vế trái áp dụng bất đẳng thức:

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\ge 2$ với $a=x,b=y,c=21,d=6$ ta thu được:

$\frac{x}{y+21}+\frac{y}{27}+\frac{6}{x+y}+\frac{21}{x+6}=\frac{2}{z}>2$ (2)(do dấu bằng $x=y=21=6$ không thể xảy ra)

Từ (1) và (2) ta suy ra phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 5: Giải phương trình nghiệm nguyên dương $y^3z^2+\left(y^3-2xy\right)z+x(x-y)=0$.

Coi phương trình như một phương trình bậc hai theo x. Ta có:

$\Delta\ge 0\Leftrightarrow (z+1)(1-y)y^2z+\frac{y^2}{4}\ge 0$

$\Rightarrow \frac{y^2}{4}\ge (z+1)(y-1)y^2z$

Điều này chỉ xảy ra khi $y=1$. Từ đây các bạn dễ dàng tìm được $x=z$ hay $z-x=\frac{-1}{2}$ (loại do x,z nguyên dương).

3)Phương pháp lùi vô hạn

Phương pháp náy do FERMAT sáng tạo ra khi giải phương trình $x^4+y^4=z^4$

Ý tưởng của phương pháp này là giả sử tìm đ ược bộ nghiệm nhỏ nhất, ta có thể lý luận sao cho tìm được bộ nghiệm nhỏ hơn.

Ví dụ 1: Giải phương trình nghiệm nguyên dương $x^2+y^2=3z^2$

Giải:

Gọi $\left(x,y,z\right)$ là nghiệm nhỏ nhất nếu $x+y+z$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Nhận xét: Nếu $x \not\vdots 3$ thì $x^2-1 \vdots 3$ vì vậy nếu x,y $\not\vdots 3$ thì

$x^2+y^2\equiv 2(\bmod 3)\Rightarrow 3z^2\equiv 2(\bmod 3)\Rightarrow$ vô lý.

Như vậy x,y phải có một số chia hết cho 3, suy ra cả hai số đều chia hết cho 3.

Đặt $x=3x_0;y=3y_0$. Thay vào phương trình ta được:

$3{x_0}^2+3{y_0}^2=z^2 \Rightarrow z^2 \vdots 3 \Rightarrow z \vdots 3$.

Đặt $z=3z_0$,ta thu được: ${x_0}^2+y_0^2=3z_0^2$. Mà rõ ràng $x_0+y_0+z_0<x+y+z$ do đó ta thu được điều mâu thuẫn. Như vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2 : Giải phương trình nghiệm nguyên $x^4+y^4=z^2$.

Để giải phương trình này, các bạn hãy xem lại phần phương trình Pitago đã viết ở phía trên.

Trước hết ta có thể giả sử $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ đôi một nguyên tố cùng nhau(*).Gọi $\left(x_0,y_0\right)$ là bộ nghiệm nhỏ nhất nếu $x_0^4+y_0^4 \min$. Theo phương trình Pitago thì

$x_0^2=m^2-n^2; y_0^2=2mn; z_0=m^2+n^2$.

Ta lại xét phương trình Pitago $n^2+{x_o}^2=m^2$. Ta có:

$x_0=a^2-b^2, n=2ab, m=a^2+b^2 (1)$.Suy ra:

${y_0}^2=4abm \Rightarrow y_0 \vdots 2$. Đặt $y_1=2y_0 \Rightarrow y_1^2=abm$.

Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh từ giả thiết (*). Suy ra:

$a={a_1}^2, b=b_1^2, m=m_1^2$.

Thay vào (1) thì $m_1^2={a_1}^4+{b_1}^4$. Mà ${m_1}^2<{z_0}^2=x_0^4+y_0^4 \Rightarrow (a,b)<(x_0,y_0) \Rightarrow$ vô lý.

Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài tập luyện tập

Bài 1: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$38x+117y=109$

Bài 2: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$123x-216y=1988$

Bài 3: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$6x+21y+88xy=123$

Bài 4: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$12x+3y+88xy=621$

Bài 5: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$2x^2+y^2+2xy=100$

Bài 6: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$2^x+2^y+2^z=2336$

Bài 7: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$x^3-y^3=12xy+3$

Bài 8: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$\frac{x+2y}{x^2+y^2}=\frac{7}{20}$$

Bài 9: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$2^x+1=x^2y$

Bài 10: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$(1+xy)(1+yz)(1+xz)=xyzt$

Bài 11: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$x^2+py^2=z^2$ với p là số nguyên tố.

Hướng dẫn: dùng các định lý và giải tương tự phương trình Pitago.

Bài 12: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$$

Hướng dẫn: Dùng bất đẳng thức.

Bài 13: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$(x+1)^2 + a^2 = (x+2)^2 + b^2 = (x+3)^2 + c^2 = (x+4)^2 + d^2$$

Hướng dẫn: Xét modulo 8.

Bài 14: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$y^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Bài 15: Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$$