PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Công thức hàm số mũ và logarit

1. Phương trình và bất phương trình mũ cơ bản

Để so sánh hai lũy thừa thì chúng ta phải chuyển hai lũy thừa về cùng cơ số và so sánh hai số mũ của chúng. Trong trường hợp so sánh BĐT (bất phương trình) thì ta phải chú ý đến sự đơn điệu của hàm số mũ (tức là phải so sánh cơ số với 1). Ta xét các phương trình – bất phương trình cơ bản sau.

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
2. $a^{f(x)} = b = a^{\log_a b} \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$.
3. $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\log_a b$.
4. $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ (1)
   + Nếu a>1 thì $(1) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
   + Nếu 0<a<1 thì $(1) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Hay $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)(f(x)-g(x)) > 0 \end{cases}$.

Để giải phương trình – bất phương trình mũ thì ta phải tìm cách chuyển về các phương trình – bất phương trình cơ bản trên.

Ví dụ 1: *Giải các phương trình sau*

1) $2^{x^2+3x-4} = 4^{x-1}$

2) $(2+\sqrt{3})^{3x+1} = (2-\sqrt{3})^{5x+8}$

3) $8^{\frac{x}{x+2}} = 36.3^{2-x}$

4) $\sqrt{2^{x+1}}.\sqrt[3]{4^{2x-1}}.8^{3-x} = 2\sqrt{2}.0,125$

Giải:

1) $pt \Leftrightarrow 2^{x^2+3x-4} = 2^{2x-2} \Leftrightarrow x^2+3x-4 = 2x-2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1; x=-2$

2) Ta có: $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1 \Rightarrow (2-\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})^{-1}$.

$\Rightarrow pt \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^{3x+1} = (2+\sqrt{3})^{-5x-8} \Leftrightarrow 3x+1 = -5x-8 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{8}$.

3) ĐK: $x \neq -2$

$Pt \Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{x+2}} = 2^2.3^{4-x} \Leftrightarrow 2^{\frac{x-4}{x+2}} = 3^{4-x} \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2}\log_3 2 = 4-x$

$\Leftrightarrow (x-4)(x+2+\log_3 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2-\log_3 2 \end{array}\right.$.

4) $Pt \Leftrightarrow 2^{\frac{x+1}{2}}.2^{\frac{4x-2}{3}}.2^{9-3x} = 2^{\frac{3}{2}}.2^{-3} \Leftrightarrow 2^{\frac{x+1}{2}+\frac{4x-2}{3}+9-3x} = 2^{\frac{3}{2}-3}$

$\Leftrightarrow x=\frac{62}{7}$ là nghiệm của phương trình .

Chú ý : Nếu trong bài toán có $\sqrt[x]{\ }$ thì điều kiện của x là : $x\geq 1; x\in\mathbb{N}$.

Ví dụ 2: Giải phương trình :

1) $\sqrt{2^x.\sqrt[3]{4^x}.\sqrt[3x]{0.125}}=4\sqrt[3]{2}$ 2) $2^{x^2+x}-4.2^{x^2-x}-2^{2x}+4=0$

Giải:

1) ĐK : $\begin{cases} x\geq \frac{1}{3} \\ 3x\in\mathbb{N}\end{cases}$. Vì các cơ số của các lũy thừa đều viết được dưới dạng lũy thừa cơ số 2 nên ta biến đổi hai vế của phương trình về lũy thừa cơ số 2 và so sánh hai số mũ.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2^x.2^{2.\frac{x}{3}}.(\frac{1}{8})^{\frac{1}{3x}}}=2^2.2^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}}.2^{\frac{x}{3}}2^{\frac{-1}{2x}}=2^{\frac{7}{3}}$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{2x}}=2^{\frac{7}{3}}\Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{2x}=\frac{7}{3}\Leftrightarrow 5x^2-14x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\frac{1}{5}\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta có $x=3$ là nghiệm của phương trình .

2) Các lũy thừa tham gia trong phương trình đều cơ số 2. Ta đi tìm quan hệ giữa các số mũ ta thấy $(x^2+x)-(x^2-x)=2x\Rightarrow x^2+x=(x^2-x)+2x$.

Ta có: PT $\Leftrightarrow 2^{x^2-x}.2^{2x}-4.2^{x^2-x}-2^{2x}+4=0$.

$\Leftrightarrow 2^{x^2-x}(2^{2x}-4)-(2^{2x}-4)=0\Leftrightarrow (2^{2x}-4)(2^{x^2-x}-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{2x}=4 \\ 2^{x^2-x}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0\end{array}\right.$.

Ví dụ 3: *Giải các bất phương trình sau:*

1) $2^x>4^{3x-1}$ 3) $3^{x+1}+5^{x+2}\geq 3^{x+2}+5^{x+1}$

2) $(\frac{1}{2})^{2x^2+1}\leq (0,125)^{3x+2}$ 4) $(x^2+\frac{1}{2})^{2x^2+x+1}\leq (x^2+\frac{1}{2})^{1-x}$

Giải:

1) BPT $\Leftrightarrow 2^x>2^{6x-2}\Leftrightarrow x>6x-2\Leftrightarrow x<\frac{2}{5}$.

2) BPT $\Leftrightarrow 25.5^x-5.5^x>9.3^x-3.3^x\Leftrightarrow 20.5^x>6.3^x\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x>\frac{3}{10}\Leftrightarrow x>\log_{\frac{5}{3}}\frac{3}{10}$.

3) BPT $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+1} \le \left(\frac{1}{8}\right)^{3x+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{9x+6} \Leftrightarrow 2x^2+1 \ge 9x+6 \Leftrightarrow 2x^2-9x-5 \ge 0$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty;-\frac{1}{2}] \cup [5;+\infty)$.

4) Vì $x^2+\frac{1}{2} > 0$ nên ta có các trường hợp sau

* $x^2+\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

* $\begin{cases} x^2+\frac{1}{2}>1 \\ 2x^2+x+1 \ge 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2x^2+2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$.

* $\begin{cases} x^2+\frac{1}{2}<1 \\ 2x^2+x+1 \le 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2x^2+2x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < x \le 0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x \in (-\infty;-1] \cup [-\frac{1}{\sqrt{2}};0] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty)$.

Chú ý : Ta có thể giải bài 4 như sau:

BPT $\Leftrightarrow (x^2-\frac{1}{2})(2x^2+2x) \ge 0$. Lập bảng xét dấu ta cũng tìm được tập nghiệm như trên

***Ví dụ 4**:* Tìm tất cả các cặp số thực (x;y) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

$$3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} \quad (1) \text{ và } 4|y|-|y-1|+(y+3)^2 \le 8 \quad (2).$$

Giải:

Vì $|y|+1 \ge |y-1| \Rightarrow 4|y|+1-|y-1| \ge 0$ nên từ (2) $\Rightarrow (y+3)^2 \le 9 \Rightarrow y \le 0$

$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow y^2+3y \le 0 \Leftrightarrow -3 \le y \le 0$ (*).

Mặt khác (1) $\Leftrightarrow 3^{|x^2-2x-3|} = 5^{-y-3} \Rightarrow -y-3 \ge 0 \Rightarrow y \le -3$ (**)

Tư (*) và (**) ta có $y=-3 \Rightarrow 3^{|x^2-2x-3|}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1; x=3$.

Thử lại ta thấy các giá trị này thỏa mãn (1) và (2).

Vậy $(x;y)=(-1;-3)$, $(3;-3)$ là những cặp (x;y) cần tìm.

Chú ý : 1) Với bài toán trên ta thấy (2) là Bất phương trình một ẩn nên ta tìm cách giải (2) và ta dư đoán bài toán thỏa mãn tại những điểm biên của y.

2) Ta có thể giải (2) bằng cách phá bỏ dấu trị tuyệt đối ta cũng tìm được nghiệm của (2) là $-3 \le y \le 0$, tuy nhiên cách làm vậy cho ta lời giải dài.

Ví dụ 5: Giải và biện luận phương trình : $\frac{1}{2^{|x-1|}}=2m-1$.

Giải:

* Nếu $2m-1\le 0\Leftrightarrow m\le \frac{1}{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

* Nếu $m>\frac{1}{2}\Rightarrow PT\Leftrightarrow 2^{|x-1|}=\frac{1}{2m-1}$ (2).

+) Với $\frac{1}{2m-1}=1\Leftrightarrow m=1\Rightarrow (2)\Leftrightarrow 2^{|x-1|}=1\Rightarrow (2)$ có 1 nghiệm $x=1$.

+) Với $m\ne 1\Rightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt $x=1\pm \log_2(2m-1)$.

Bài tập:

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1) $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=3^x+3^{x+1}+3^{x+2}$ 2) $3^{2x^2+x+5}=27^{2x+1}$

3) $5^{x^2-5x+6}=2^{x-3}$ 4) $2^x.5^{\frac{x-1}{x}}=10$ 5) $(x^2+3)^{\left|x^2-5x+4\right|}=(x^2+3)^{x+4}$

6) $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0,25.128^{\frac{x+17}{x-3}}$ (x=10). 7) $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$ (x=1;x=4)

8) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-2}=\frac{9}{16}.\sqrt[x]{\frac{9}{16}}$ 9) $2^x.\sqrt[x+1]{27^x}.\sqrt{5^x}=180$.

10) $4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1$.

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

1) $3^{x^2-4x}\le 2^{x-4}$ 2) $\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}}<(\sqrt{10}-3)^{\frac{x+1}{x+3}}$ 3) $(4x^2+2x+1)^{x^2-x}\le 1$

4) $|x-1|^{2x^2+x-1}>1$ 5) $(x^2+x+1)^{2x^2-3}<(x^2-x+1)^x$

6) $\frac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\le 1$ 7) $3^{\sqrt{x^2-2x}}\ge \left(\frac{1}{3}\right)^{x-|x-1|}$

8) $4x^2+x.2^{x^2+1}+3.2^{x^2}>x^2.2^{x^2}+8x+12$

Bài 4: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\frac{3m-1}{5^{|x^2-m+2|}}=2m+1.$$

Bài 5: Tìm m để phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|}=m^4-m^2+1$ có bốn nghiệm phân biệt.

2) Các phương pháp giải PT – BPT mũ:

1. Phương pháp đặt ẩn phụ

Cũng như PT – BPT vô tỉ và lượng giác, để giải PT – BPT mũ ta có thể dùng phương pháp đặt ẩn phụ. Tức là ta thay thế một biểu thức chứa hàm số mũ bằng một biểu thức chứa ẩn phụ mà ta đặt và chuyển về những phương trình – bất phương trình ma ta đã biết cách giải. Phương pháp đặt ẩn phụ rất phong phú và đa dạng, để có được cách đặt ẩn phụ phù hợp thì ta phải nhận xét được quan hệ cảu các cơ số có trong phương trình.

Ví dụ 1: Giải phương trình:

1) $2.16^x - 15.4^x - 8 = 0$ 2) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} - 3 = 0$.

Giải:

1) Nhận xét cơ số ta thấy 16 chính là bình phương của 4, tức là ta có: $16^x = (4^2)^x = (4^x)^2$

Nên ta đặt: $t = 4^x, t > 0 \Rightarrow 16^x = (4^x)^2 = t^2$.

Phương trình trở thành: $2t^2 - 15t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 8 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

2) Vì số mũ của hai lũy thừa trong phương trình là hai hàm số lượng giác và hai hàm số này biểu thị qua nhau bởi hệ thức $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ nên ta chuyển số mũ của hai lũy thừa đó về một hàm lượng giác.

Ta có phương trình $\Leftrightarrow 4^{2\cos^2 x} + 4.4^{\cos^2 x} - 12 = 0$.

Đặt $t = 4^{\cos^2 x}, t > 0$, ta có phương trình : $t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

$\Leftrightarrow 2^{2\cos^2 x} = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Nhận xét: Ta có dạng tổng quát của bài toán trên là: $F(a^{f(x)}) = 0$.Với dạng này ta đặt $t = a^{f(x)},\ t > 0$ và chuyển về phương trình $F(t) = 0$, giải tìm nghiệm dương t của phương trình, từ đó ta tìm được x. Ta thường gặp dạng: $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$.

Với BPT ta cũng làm tương tự.

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình:

1) $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} < 1$ 2) $9^{\sqrt{x^2-2x}-x} - 7.3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1} \le 2$

Giải:

1) BPT $\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}} - \frac{2}{2^{\sqrt{x}}} < 1$. Đặt $t = 2^{\sqrt{x}}, t \ge 1$, ta có:

$t - \frac{2}{t} < 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow 1 \le t < 2 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}} < 2 \Leftrightarrow 0 \le x < 1$.

2) BPT $\Leftrightarrow 3.9^{\sqrt{x^2-2x}-x}-7.3^{\sqrt{x^2-2x}-x}\le 6$.

Đặt $t=3^{\sqrt{x^2-2x}-x}, t>0$, ta có bất phương trình :

$3t^2-7t-6\le 0\Leftrightarrow t\le 3\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x}-x\le 1\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x}\le x+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x\ge 0\\ x+1\ge 0\\ x^2-2x\le (x+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0 \text{ V } x\ge 2\\ x\ge -1\\ x\ge -1/4\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le x\le 0 \text{ V } x\ge 2.$$

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình : 1) $2.3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+9^{\sqrt[4]{x}+\frac{1}{2}}\ge 9^{\sqrt{x}}$ 2) $3^{2x}-8.3^{x+\sqrt{x+4}}-9.9^{\sqrt{x+4}}>0$.

Giải:

1) Trong bất phương trình

Chia hai vế BPT cho $9^{\sqrt{x}}$ ta được: $2.3^{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}+3.9^{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}\ge 1$.

Đặt $t=3^{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}, t>0$, ta có BPT: $3t^2+2t-1\ge 0\Leftrightarrow t\ge \frac{1}{3}\Leftrightarrow 3^{\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}}\ge 3^{-1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}-\sqrt{x}\ge -1\Leftrightarrow \sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-1\le 0\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}\le \frac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow 0\le x\le \frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

2) Chia hai vế BPT cho $9^{\sqrt{x+4}}$ ta được: $3^{2(x-\sqrt{x+4})}-8.3^{x-\sqrt{x+4}}-9>0$

Đặt $t=3^{x-\sqrt{x+4}}, t>0$, ta có: $t^2-8t-9>0\Leftrightarrow t>9\Leftrightarrow 3^{x-\sqrt{x+4}}>3^2$

$$x-\sqrt{x+4}>2\Leftrightarrow x+2>\sqrt{x+4}\Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0\\ (x+2)^2>x+4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x>-2\\ x^2+3x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0.$$

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau: 1) $2^{x^2-x}-2^{2+x-x^2}=3$ 2) $2^{3x}-6.2^x-\frac{1}{2^{3(x-1)}}+\frac{12}{2^x}=1$.

Giải:

1) PT $\Leftrightarrow 2^{x^2-x}-\frac{4}{2^{x^2-x}}=3\Leftrightarrow 2^{2(x^2-x)}-3.2^{x^2-x}-4=0$.

Đặt $t=2^{x^2-x}, t>0$. Ta có: $t^2-3t-4=0\Leftrightarrow t=4\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=2\end{array}\right.$.

2) Đặt $t=2^x, t>0$ ta có: $t^3-6t-\frac{8}{t^3}+\frac{12}{t}=1\Leftrightarrow (t^3-\frac{8}{t^3})-6(t-\frac{2}{t})-1=0$.

Đặt $y=t-\frac{2}{t}\Rightarrow t^3-\frac{8}{t^3}=\left(t-\frac{2}{t}\right)\left(t^2+\frac{4}{t^2}+2\right)=\left(t-\frac{2}{t}\right)\left[(t-\frac{2}{t})^2+6\right]=y(y^2+6)$

Nên ta có phương trình : $y^3-1=0 \Leftrightarrow y=1 \Leftrightarrow t-\frac{2}{t}=1 \Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow x=1$.

Ví dụ 5: Giải phương trình :

1) $(5+\sqrt{24})^x+(5-\sqrt{24})^x=10$ 2) $(7+4\sqrt{3})^x-3(2-\sqrt{3})^x+2=0$.

Giải:

Nhận xét hai cơ số ta thấy: $(5+\sqrt{24})(5-\sqrt{24})=1 \Rightarrow (5+\sqrt{24})^x(5-\sqrt{24})^x=1$. Do vậy nếu đặt $t=(5+\sqrt{24})^x, t>0 \Rightarrow (5-\sqrt{24})^x=\frac{1}{t}$ và phương trình đã cho trở thành

$t+\frac{1}{t}=10 \Leftrightarrow t^2-10t+1=0 \Leftrightarrow t=5\pm\sqrt{24}$.

Từ đây ta tìm được $x=\pm 1$.

Nhận xét: Bài toán trên có dạng tổng quát như sau:

$m.a^{f(x)}+n.b^{f(x)}+p=0$, trong đó $a.b=1$. Đặt $t=a^{f(x)}$, $t>0 \Rightarrow b^{f(x)}=\frac{1}{t}$.

2) Ta có: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ và $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$ nên ta đặt $t=(2+\sqrt{3})^x, t>0$ ta có phương trình : $t^2-\frac{3}{t}+2=0 \Leftrightarrow t^3+2t-3=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+3)=0 \Leftrightarrow t=1$

$\Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

Ví dụ 6: Giải các phương trình sau:

1) $6.9^x-13.6^x+6.4^x=0$ 2) $9^{-x^2+2x+1}-34.15^{2x-x^2}+25^{2x-x^2+1}=0$

Giải:

1) Nhận xét các cơ số ta có: $9=3^2;4=2^2;6=3.2$, do đó nếu đặt $a=3^x, b=2^x$, ta có: $6a^2-13ab+6b^2=0$ đây là phương trình đẳng cấp bậc hai đối với a,b. Chia hai vế PT cho b^2 và đặt $t=\frac{a}{b}=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ ta được: $6t^2-13t+6=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{2}, t=\frac{2}{3}$.

Từ đây ta có: $x=\pm 1$.

Nhận xét: Ta có dạng tổng quát của phương trình trên là:

$m.a^{2f(x)}+n.(a.b)^{f(x)}+p.b^{2f(x)}=0$. Chia 2 vế phương trình cho $b^{2f(x)}$ và đặt $t=(\frac{a}{b})^{f(x)}$, $t>0$. Ta có PT: $mt^2+nt+p=0$.

2) $PT \Leftrightarrow 9.9^{2x-x^2}-34.15^{2x-x^2}+25.25^{2x-x^2}=0$

$\Leftrightarrow 9\left(\frac{3}{5}\right)^{2(2x-x^2)} - 34\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} + 25 = 0 \Leftrightarrow 9t^2 - 34t + 25 = 0$ (Với $t = \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2}, t > 0$).

$\Leftrightarrow t = 1;\ t = \frac{25}{9}$.

* $t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} = 1 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$.

* $t = \frac{25}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Ví dụ 7:Giải phương trình:

1) $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$ 2) $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$.

Giải:

1) PT $\Leftrightarrow 5^{3x} + 5^{2x}.2^x = 2.2^{3x} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 2 = 0$

Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x, t > 0$ ta được: $t^3 + t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

2) PT $\Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 2 = 0$. Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x, t > 0$ ta được:

$3t^3 + 4t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(3t^2 + t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$.

Ví dụ 8: Tìm m để các phương trình sau có nghiệm

1) $4^x + 5.2^x + m = 0$ 2) $\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x + m\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8$.

Giải:

1) Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình trở thành: $t^2 + 5t = -m$ (1). Suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t > 0$.

Với $t > 0$ ta có hàm $f(t) = t^2 + 5t > 0$ và liên tục nên phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

2) Đặt : $t = \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x, t > 0$, ta có phương trình : $t + \frac{m}{t} = 8 \Leftrightarrow t^2 - 8t = -m$ (2)

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $t > 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 8t$ với $t > 0$, ta có: $f(t) = (t-4)^2 - 16 \ge -16$ nên phương trình đã cho có nghiệm $-m \ge -16 \Leftrightarrow m \le 16$.

Ví dụ 9: Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:

1) $9^x + m.3^x + 1 \le 0$ 2) $3^{2x} - m.3^{x+\sqrt{x+4}} - 9.9^{\sqrt{x+4}} < 0$.

Giải:

1) Đặt $t = 3^x, t > 0$. Bất phương trình trở thành: $t^2 + mt + 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+1}{t} \le -m$ (3).

Bất phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t > 0 \Leftrightarrow \underset{t>0}{\text{Min}}\, f(t) \le -m$ **(*)**.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+1}{t}$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = \frac{t^2-1}{t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Từ đây suy ra $\underset{t>0}{\text{Min}}\, f(t) = f(1) = 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -m \ge 2 \Leftrightarrow m \le -2$.

Chú ý : BPT : $f(x) \le k$ $\left(f(x) \ge k\right)$ có nghiệm trên D $\Leftrightarrow \underset{D}{\text{Min}}\, f(x) \le k$ $(\underset{D}{\text{Max}} \ge k)$

2) Chia hai vế của BPT cho $3^{x+\sqrt{x+4}}$ ta được:

$3^{x-\sqrt{x+4}} - 9.3^{\sqrt{x+4}-x} - m < 0 \Leftrightarrow f(t) = t - \frac{9}{t} < m$ (**), trong đó $t = 3^{x-\sqrt{x+4}}$

Xét hàm số $u(x) = x - \sqrt{x+4}$ với $x \ge -4$. Ta có

$$u'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \Rightarrow u'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 4 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{15}{4} \Rightarrow u(x) \ge u(-\frac{15}{4}) = -\frac{17}{4}$$

Suy ra $t \ge 3^{-\frac{17}{4}}$.

Xét hàm số f(t) trên $D = [\frac{1}{81\sqrt[4]{3}}; +\infty)$, ta có f(t) là hàm đồng biến nên

$\underset{D}{\text{Min}}\, f(t) = f(\frac{1}{81\sqrt[4]{3}}) = \frac{1 - 729\sqrt{3}}{81\sqrt[4]{3}} \Rightarrow$ BPT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ (**) có nghiệm $t \in D$

$\Leftrightarrow m > \underset{D}{\text{Min}}\ f(t) = \frac{1 - 729\sqrt{3}}{81\sqrt[4]{3}}$.

Chú ý : 1) Ở bài toán trên chúng ta thường mắc sai lầm là khi đặt t ta cho rằng điều kiện của t là $t > 0$! Dẫn đến điều này là do chúng ta không xác định tập giá trị của u(x) và lúc đó ta sẽ cho lời giải sai!.

2) BPT $f(x) \ge k$ $(f(x) \le k)$ $\forall x \in D \Leftrightarrow \underset{D}{\text{Min}}\, f(x) \ge k$ $(\underset{D}{\text{Max}}\, f(x) \le k)$.

Ví dụ 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số a sao cho bất phương trình sau được nghiệm đúng với mọi $x \le 0$: $a.2^{x+1} + (2a+1)(3-\sqrt{5})^x + (3+\sqrt{5})^x < 0$.

Giải:

BPT $\Leftrightarrow 2a.2^x + (2a+1)(3-\sqrt{5})^x + (3+\sqrt{5})^x < 0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x+(2a+1)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x+2a<0$

Đặt $t=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x, 0<t\le 1\ \forall x\le 0\Rightarrow \frac{1}{t}=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x$ và bất phương trình trở thành:

$t+(2a+1)\frac{1}{t}+2a<0\Leftrightarrow t^2+1<-2a(t+1)\Leftrightarrow \frac{t^2+1}{t+1}<-2a\quad$ (**I**)

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+1}{t+1}$ với $t\in D=(0;1]$.

Ta có: $f'(t)=\frac{t^2+2t-1}{(t+1)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=-1+\sqrt{2}\Rightarrow \underset{(0;1]}{\mathrm{Max}}\, f(t)=f(1)=1$.

BPT đã cho nghiệm đúng $\forall x\le 0\Leftrightarrow$ (**I**) đúng $\forall t\in(0;1]\Leftrightarrow -2a>\underset{(0;1]}{\mathrm{Max}}\, f(t)\Leftrightarrow a<-\frac{1}{2}$.

Ví dụ 11: Tìm m để bpt $m.9^{2x^2-x}-(2m+1)6^{2x^2-x}+m.4^{2x^2-x}\le 0$ nghiệm đúng với mọi x thỏa mãn $|x|\ge\frac{1}{2}$.

Giải:

Chia hai vế bất phương trình cho 4^{2x^2-x} và đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x^2-x}$ ta có bất phương trình :

$m.t^2-(2m+1)t+m\le 0\Leftrightarrow t\ge m(t^2-2t+1)\quad(*)$.

Xét hàm số $u(x)=2x^2-x$ với $|x|\ge\frac{1}{2}$, có $u'(x)=4x-1\Rightarrow u(x)\ge u(\frac{1}{2})=0\ \forall |x|\ge\frac{1}{2}$

$\Rightarrow t\ge 1\ \ \forall |x|\ge\frac{1}{2}$.

* Với t=1 ta thấy (*) đúng.

* Với $t>1\Rightarrow(*)\Leftrightarrow f(t)=\frac{t}{t^2-2t+1}\ge m\quad(**)$

Ta có $f'(t)=\frac{-t^2+1}{(t-1)^4}<0\ \ \forall t>1\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$

Mà $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0\Rightarrow f(t)>0\ \ \forall t>1$. Suy ra (**) đúng $\forall t>1\Leftrightarrow m\le 1$.

2. Phương pháp đánh giá.
Nội dung phương pháp này là dựa vào tính đơn điệu của hàm số mũ để tìm nghiệm của phương trình. Đường lối chính là ta dự đoán một nghiệm của phương trình rồi dựa vào tính đơn điệu của hàm số mũ chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất.

Ví dụ1: Giải các phương trình sau
1) $4^x + 3^x = 5^x$ 2) $3^x = 4 - x$

Giải:
1) Ta khó tìm được mối liên hệ giữa các cơ số xuất hiện trong bài toán. Tuy nhiên ta nhận thấy phương trình có nghiệm x=2. Ta tìm cách chứng minh x=2 là nghiệm duy nhất của phương trình. Để làm điều này ta chia hai vế phương trình cho 5^x (Nhằm tạo ra hàm số ở VT nghịch biến) ta được: $\left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$ (1).
Gọi $f(x)$ là VT của (1) $\Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến và $f(2) = 1$.
* $x > 2 \Rightarrow f(x) < f(2) = 1 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.
* $x < 2 \Rightarrow f(x) > f(2) = 1 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

2) Ta có: $PT \Leftrightarrow 3^x + x = 4$ (2)

Ta thấy VT của (2) là một hàm đồng biến và x=1 là một nghiệm của phương trình và đây cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:
1) $3.4^x + (3x-10)2^x + 3 - x = 0$ 2) $4^{x^2-4} + (x^2-4)2^{x-2} = 1$.

Giải:

Ví dụ 2: *Giải và biện luận phương trình:*
$$5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2 + 2mx + m$$

Bài tập:
Bài 1: Giải các phương trình sau

1) $3^{4x+8} - 4.3^{2x+5} + 27 = 0$ 2) $3.2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}} - 2^{\frac{\sqrt{x}+5}{2}} + 4 = 0$

3) $(5-\sqrt{21})^x + 7(5+\sqrt{21})^x = 2^{x+3}$ 4) $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^{\sin x} + (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^{\sin x} = 2$

5) $4^{x-\sqrt{x^2-5}}-12.2^{x-1-\sqrt{x^2-5}}+8=0$ 6)

Bài 2: Giải các bất phương trình sau:

1) $9^{x^2-2x}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2}\leq 3$

Bài tập

Bài 1: Giải các phương trình và bất phương trình sau

7) $25^x-6.5^x+5>0$

8) $3^{x+1}+18.3^{-x}<29$

10) $4^{x+1}+2^{x+2}-3=0$

11)

12) $3.16^x+2.81^x=5.36^x$

13) $2^{2x+1}-5.6^x-3^{2x+1}\geq 0$

14) $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=14$

15) $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x+(\sqrt{7-\sqrt{48}})^x\leq 14$

16)

Bài 2: Tìm m để các phương trình và Bất phương trình sau có nghiệm:

1) $m.9^x+(m-1)3^{x+2}+m-1=0$

2)$4^x-m.2^{x+1}+3-2m\leq 0$

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1.Phương trình cơ bản

* $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0\ \ (g(x) \geq 0) \end{cases}$

*$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$

*$\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$ (*)

+ Nếu a>1 thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

+ Nếu 0<a<1 thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Chú ý: $\log_a f(x)$ *có nghĩa* $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ 0 < a \neq 1 \end{cases}$

Ví dụ 1: *Giải các phương trình sau*

1) $\log_3(x-1) + \log_3(x-2) = \log_3 6$

2) $\lg(x^2 - 7x + 6) = \lg(x-1) + 1$

3) $(\sqrt{1\text{-x}} + \sqrt{1+x} - 2)\log_2(x^2 - x) = 0$

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3x + 2) \geq -1$

5) $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < \log_5 5(2^{x-2} + 1)$

6) $\sqrt{\log_3 \dfrac{2x-3}{1-x}} < 1$

2. Các phương pháp giải Phương trình-Bất phương trình logarit

Phương pháp đặt ẩn phụ:

*Công thức đổi cơ số: $\log_b x == \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

Ví dụ 1: *Giải các phương trình và bất phương trình sau*

1) $1+\log_2(x-1)=\log_{x-1}4$

2) $\log_{5x}\dfrac{5}{x}+\log_5^2 x=1$

3) $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-5=0$

4) $\log_2^4 x-\log_{\frac{1}{2}}^2\left(\dfrac{x^3}{8}\right)+9\log_2\dfrac{32}{x^2}<4\log_{\frac{1}{2}}^2 x$

5) $\sqrt{\log_4(2x^2+3x+2)1}>\log_2(2x^2 3x+2)$

$a)\lg^2 x-\lg x^3+2=0$

$c)\dfrac{1}{4-\lg x}+\dfrac{2}{2+\lg x}=1$

$d)3\log_x 16-4\log_{16}x=2\log_2 x$

$f)5^{\lg x}+x^{\lg 5}=50$

$g)\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3$

$h)\ x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}$

$i*)9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$

1) $\log_{\frac{1}{2}}(4^x+4)\ge\log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1}-3.2^x)$

2) $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\dfrac{1}{4}\log_4(x-1)^8=\log_2(4x)$

3) $16\log_{27x^3}x-3\log_{3x}x^2$

4) $4(\log_2\sqrt{x})^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0\ \ x\in(0;1)$

5) $\log_{\frac{1}{2}}x+2\log_{\frac{1}{4}}(x-1)+\log_2 6\le 0$

6) $\log_5(5^x-4)=1-x$

7) $\log_3 x>\log_x 3$

8) $2x^{\frac{1}{2}\log_2 x}\ge 2^{\frac{3}{2}\log_2 x}$

9) $\log_{\frac{\pi}{4}}(\log_2(x+\sqrt{2x^2-x})<0$