

**PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH
HỆ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ**

VẤN ĐỀ 1. ĐÁP ÁN VỀ CÙNG CƠ SỞ

Loại 1:

- | | | |
|---|---|--|
| <p>1. $4^x = 8^{2x-1}$,</p> <p>2. $5^{2x} = 625$</p> <p>3. $16^{-x} = 8^{2(1-x)}$,</p> <p>4. $2^{x^2-3x+2} = 4$</p> <p>5. $6^{3-x} = 216$</p> <p>6. $3^{4-2x} = 9^{5-3x-x^2}$</p> <p>7. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^4$</p> <p>8. $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16}\right)^x$</p> <p>9. $3^{x-1} = \frac{1}{729}$</p> <p>10. $2^{3x} = (512)^{3x}$</p> <p>11. $3^{x^2-4x+1} = \frac{1}{9}$</p> <p>12. $\sqrt[3]{128} = 4^{2x}$</p> <p>13. $5^{ 4x-6 } = 25^{3x-4}$</p> <p>14. $3^{ 3x-4 } = 9^{2x-2}$</p> <p>15. $5^{\sqrt{2x}} = 625$</p> <p>16. $3^x < 27.9^{x^2}$</p> <p>17. $2^{2x^2-5x-1} = 0,125$</p> <p>18. $5^{x-2} \cdot 2^x \cdot 3^{x-1} = 12$</p> <p>19. $64^{2x} = \sqrt{0,125}$</p> | <p>20. $3^{ 3x+1 } \geq 3^{2x+1}$</p> <p>21. $(0,4)^{x-1} = (6,25)^{6x-5}$</p> <p>22. $0.125.4^{2x-3} < \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$</p> <p>23. $2^{\cos 2x} - \frac{1}{2.2^{\cos 2x}} = 0$</p> <p>24. $10^x + 10^{x-1} = 0,11$</p> <p>25. $(\sqrt{3})^{\lg 2x} - \frac{3\sqrt{3}}{3^{\lg 2x}} = 0$</p> <p>26. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25.128^{\frac{x+17}{x-3}}$</p> <p>27. $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+x-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$</p> <p>28. $\sqrt{5^x} \cdot 5^{x/2} = 225$</p> <p>29. $5^{2x+1} - 3.5^{2x-1} = 550$</p> <p>30. $16^{\frac{x+10}{x-10}} = (0,125).8^{\frac{x+5}{x-5}}$</p> <p>31. $3^{x^2-6x+5/2} = 81\sqrt{3}$</p> <p>32. $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$</p> <p>33. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = (0,25).(128)^{\frac{x+7}{x-3}}$</p> <p>34. $5^{2x} = (0,04)^{2x-3}$</p> <p>35. $5^2.5^4 \dots 5^{2x} = 0,04^{-28}$</p> | <p>36. $2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3} + 1}$</p> <p>37. $2^{x+2} - 2^{x+1} - 1 = 2^{x+1} + 1$</p> <p>38. $16^{\frac{1}{x+2}} \cdot \frac{1}{x-2} = (0,25).2^{\frac{3x-7}{x^2-4}}$</p> <p>39. $3^{x+1} = 18^{2x} \cdot 2^{-2x} \cdot 3^{x+2}$</p> <p>40. $10^{x^2+x-2} = 10000$</p> <p>41. $3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x- x-1 }$ (Luật 96)</p> <p>42. $(2-\sqrt{3})^{x^2+1} > (2-\sqrt{3})^{3x+1}$</p> <p>43. $\left(3\sqrt{3}\sqrt{3}\right)^x = \left(\frac{1}{81}\right)^{2x+3}$</p> <p>44. $3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x- x-1 }$ (BKHN 98)</p> <p>45. $\sqrt{2^x} \sqrt[3]{4^x} \sqrt{0,125} = \sqrt[3]{0,25}$</p> <p>46. $\left[2\left(2^{\sqrt{x+3}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$</p> <p>47. $\left[2\left(2^{\sqrt{x+5}}\right)^{\frac{1}{5\sqrt{x+1}}}\right]^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2} \cdot 4^{\sqrt{x}}$</p> <p>48. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} + 3^{x-3} = 99 + \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{4-x}}$</p> |
|---|---|--|

Loại 2:

- | | |
|---|---|
| <p>1. $(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq (\sqrt{2}-1)^{-x}$</p> <p>2. $(\sqrt{5}+2)^{x+1} \geq (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$</p> | <p>3. $(2-\sqrt{3})^{x^2+1} > (2+\sqrt{3})^{3x+1}$</p> <p>4. $(\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} = (\sqrt{10}-3)^{\frac{x+1}{x+3}}$ (GTVT 98)</p> |
|---|---|

Loại 3:

- | | |
|---|---|
| <p>1. $3.2^{x+1} + 5.2^x - 2^{x+2} = 21$</p> <p>2. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 9477$</p> <p>3. $5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$,</p> <p>4. $2^{x-1} - 3^x = 3^{x-1} - 2^{x+2}$,</p> <p>5. $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 7^x + 7^{x+1} - 7^{x+2}$</p> <p>6. $2^{2x+5} - 3^{\frac{x+9}{2}} = 3^{\frac{x+7}{2}} - 4^{x+4}$</p> <p>7. $3.4^x + \frac{1}{3}.9^{x+2} = 6.4^{x+2} - \frac{1}{2}.9^{x+1}$</p> <p>8. $7.3^{x+1} + 5^{x+3} \leq 3^{x+4} + 5^{x+2}$</p> | <p>9. $9^x - 2^{x+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{x+1}{2}} - 3^{2x-1}$</p> <p>10. $4^{-x} - 3^{-x-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}-x} - 2^{-2x-1}$</p> <p>11. $5^{\frac{x+1}{2}} - 9^x = 3^{2x-2} - 5^{\frac{x-1}{2}}$</p> <p>12. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+1}{2}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+3}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$</p> <p>13. $4^{x+2} - 10.3^x = 2.3^{x+3} - 11.2^{2x}$</p> <p>14. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} \leq 5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1}$</p> |
|---|---|

Loại 5:

1. $x^2 - (2^x - 3)x + 2(1 - 2^x) = 0$
2. $4x^2 + x.2^{x^2+1} + 3.2^{x^2} > x^2.2^{x^2} + 8x + 12$ (D-ọc 97)
3. $(3^x - 1)(3^{1-x} - 3^x + 1) > 0$
4. $(4^x - 2)(3^{2-x} + 3 - 2x) \geq 0$
5. $(3^x - 2x - 1)(2^x - 1) < 0$
6. $x^2.2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2.2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$

Loại 6:

1. $6^{2x+3} = 2^{x+7}.3^{3x-1}$,
2. $3^{x-1}.2^{2x-2} = 12^{9-x}$,
3. $3^{x+3}.7^{x+3} = 3^{2x}.7^{2x}$
4. $6^{2x+3} \geq 2^{x+7}.3^{3x-1}$
5. $3^{2x+3}.5^{2x+3} = 5^{5x}.3^{5x}$

Giải bptv với $a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{N}^*$

$$1 + a^2 + \dots + a^{x-1} + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$$

VẤN ĐỀ 2. ĐẶT ẨN PHỤ

Dạng 1: t n phụ luôn.

Loại 1:

1. $4^x + 2^x - 6 = 0$
2. $4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16$
3. $9^x - 25.3^x + 7 = 0$
4. $25^x - 23.5^x - 5 = 0$
5. $25^x - 6.5^{x+1} + 5^3 = 0$
6. $3.5^{2x-1} - 2.5^{x-1} = \frac{1}{5}$
7. $13^{2x} - 6.13^x + 5 = 0$
8. $\frac{3}{2^{3-x}} = 4^{x-4} - 7$
9. $3^{2(x+1)} - 82.3^x + 9 = 0$
10. $4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16$
11. $3^{x^2+2} + 9^{x+1} = 4$
(PVBC hí 98)
12. $9^{x^2-1} - 3^{x^2+1} - 6 = 0$
13. $9^{x^2-1} - 36.3^{x^2-3} + 3 = 0$
14. $(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} - 84 = 0$
15. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$
16. $8^x - 3.4^x - 3.2^{x+1} + 8 = 0$
17. $4^{2x} + 2^{3x+1} + 2^{x+2} - 16 = 0$
18. $5^{2x-3} = \frac{2}{5^{x-1}} + 15$
19. $2^{2x+6} + 2^{x+7} - 17 > 0$
(NNHN 98)
20. $5^{x-1} + 5^{x-3} = 16$
21. $5^{1+x} + 5^{1-x} = 16$
22. $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$
23. $4^x + 2^{3-4x} = 6$
24. $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} + 4 = 0$
25. $5^{\sqrt{x}} - 5^{1-\sqrt{x}} = 4$
26. $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$
27. $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$
28. $(\frac{1}{4})^{x-2} = 2^{5-x} + 9$
29. $\frac{3^{2x}}{100^x} = 2(0.3)^x + 3$
30. $4^x + 2^{3-4x} < 6$
31. $(\frac{1}{6})^{x-3} = 6^{5-2x} - 12$
32. $\frac{9}{2^{x-2}} = \frac{10 + 4^{\frac{x}{2}}}{4}$
33. $(\frac{1}{4})^{3x} - (\frac{1}{8})^{x-1} - 128 \geq 0$
34. $9^{\sqrt{x^2-2x-x}} - 7.3^{\sqrt{x^2-2x-x-1}} = 2$
35. $3.2^{\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}} - 8.2^{\frac{\sqrt{x-1}}{2}} + 4 = 0$
36. $5.2^{3|x-1|} - 3.2^{5-3x} + 7 = 0$.
37. $8^x - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$
38. $8.3^{\sqrt{x+4}\sqrt{x}} + 9^{\sqrt[4]{x+1}} = 9^{\sqrt{x}}$
39. $13^{2x} - 6.13^x + 5 \geq 0$
40. $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28.3^{-1+\sqrt{x^2-3}}$
41. $4^{\sin^2 \pi x} + 3.4^{\cos^2 \pi x} \leq 8$
42. $2^{\text{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} - 2.0,25^{\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}} \geq 1$
43. $2^{\sin^2 x} + 4.2^{\cos^2 x} = 6$
44. $\text{ctg} 2^x = \text{tg} 2^x + 2\text{tg}^{x+1}$
45. $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$

Loại 2: t n phụ nh-ng vẫn còn n x

1. $9^x + 2(x-2).3^x + 2x - 5 = 0$ (N 97)
2. $25^x - 2(3-x).5^x + 2x - 7 = 0$ (TC 97)
3. $3.16^{x-2} - (3x-10).4^{x-2} + 3 - x = 0$
4. $3.4^x + (3x-10).2^x + 3 - x = 0$
5. $8 - x.2^x + 2^{3-x} - x = 0$
6. $9^{-x} - (x+2).3^{-x} - 2(x+4) = 0$
7. $9^{x^2} + (x^2-3).3^{x^2} + 2(1-x^2) = 0$
8. $3^{2x} + 2(x-2).3^x + 2x - 9 = 0$
9. $3^{2x-3} - (3x-10).3^{x-2} + 3 - x = 0$

10. $4^{\frac{1}{x}} + 2x \cdot 2^{\frac{1}{x}} - 6x = 9$

11. $3 \cdot 25^{x-2} + (3x - 10)5^{x-5} + 3 - x = 0$

Dạng 2: Chia xong t

Ví dụ. Giải phương trình: $27^x + 12^x + = 2 \cdot 8^x$ (1)

Giải:

$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$ (2). $t \left(\frac{3}{2}\right)^x = t$ (*). Khi phương trình (2): $t^3 + t - 2 = 0$, $t > 0$.

$t = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$ suy ra $x = \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$. Vậy phương trình cho c một nghiệm: $x = 0$.

B i tập t trong t

1. $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$

2. $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$

3. $4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x$

4. $8^{x^3-1} + 18^{x^3-1} = 2 \cdot 27^{x^3-1}$

5. $3 \cdot 4^x - 2 \cdot 6^x = 9^x$

6. $2 \cdot 4^{x^2+1} + 6^{x^2+1} = 9^{x^2+1}$

7. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

8. $25^x + 10^x = 2 \cdot 2^{2x+1}$ (HVNH 98)

9. $125^x + 50^x = 2 \cdot 3^{x+1}$ (QGHN 98)

10. $42^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$

11. $49^{\frac{1}{x}} - 35^{\frac{1}{x}} = 25^{\frac{1}{x}}$

12. $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$

13. $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$ (TS 97)

14. $4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}}$

$2 \cdot 4^{\frac{-1}{x}} - 6^{\frac{-1}{x}} = 3 \cdot 9^{\frac{-1}{x}}$

15. $2^{x-1}(2^x + 3^{x-1}) = 9^{x-1}$

16. $2 \cdot 81^x - 7 \cdot 36^x + 5 \cdot 16^x = 0$

17. $2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x - 4^x \geq 0$ (GT 96)

18. $4^x - 2 \cdot 6^x = 3 \cdot 9^x$ (HVH 98)

19. $4^{\lg(20x)} - 6^{\lg x} = 2 \cdot 3^{\lg(100x^2)}$ (BKHN 99)

20. $8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{1 + \sqrt[4]{x}} > 9^{\sqrt{x}}$

21. $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$ (HVCNBCVT 98)

22. $2^{2 \sin x - 2 \cos x + 1} - 7 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{\cos x - \sin x} + 5^{2 \sin x - 2 \cos x + 1} = 0$

23. $2^{2 \sin 2x - \cos 2x + 3} - \left(\frac{1}{6}\right)^{\cos 2x - 2 \ln 2x - \log_6 14} + 3^{2 \sin 2x - 2 \cos 2x + 1} = 0$

Dạng 3: $A^x \cdot B^x = 1$.

1. $(5 + \sqrt{24})^x + (5 - \sqrt{24})^x = 10$

2. $(5 + 2\sqrt{6})^x + (5 - 2\sqrt{6})^x = 10$

3. $\sqrt{(5 - 2\sqrt{6})^x} + \sqrt{(5 + 2\sqrt{6})^x} = 10$

4. $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 14$ (NT 97)

5. $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 4$

6. $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x = 4$ (NN N 95)

7. $(3 + \sqrt{5})^x + 7(3 - \sqrt{5})^x = 2^x$

8. $(3 + 2\sqrt{2})^{\lg x} + (3 - 2\sqrt{2})^{\lg x} = 6$

9. $(7 + 4\sqrt{3})^{\sin x} + (7 - 4\sqrt{3})^{\sin x} = 4$

10. $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62$

11. $\left(\sqrt[3]{3 - \sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3 + \sqrt{8}}\right)^x = 6$

12. $(\sqrt{7 + \sqrt{48}})^x + (\sqrt{7 - \sqrt{48}})^x = 14$

13. $(2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 1} + (2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$

14. $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^{x^2 - 2x - 1} + \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^{x^2 - 2x + 1} \leq \frac{4}{2 - \sqrt{3}}$

15. $(5 - \sqrt{21})^x + 7(5 + \sqrt{21})^x = 2^{x+3}$ (QGHN 97)

16. $(2 + \sqrt{3})^x + (7 + 4\sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})^x = 4(2 + \sqrt{3})$ (NN 98)

17. $(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{\cos x} + (\sqrt{7-4\sqrt{3}})^{\cos x} = 4$

(Luật HN 98)

18. $(\sqrt{11}-\sqrt{6})^x + (\sqrt{11}+\sqrt{6})^x = (\sqrt{5})^x$

Dạng 4:

1. $4^x + 4^{-x} + 2^x + 2^{-x} = 10$

2. $3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 6$

3. $\left(2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}}\right) - 6 \cdot \left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1$

19. $(2\sqrt{3} + \sqrt{11})^{2x-1} + (2\sqrt{3} - \sqrt{11})^{2x-1} = 4\sqrt{3}$

20.

4. $8^{x+1} + 8 \cdot (0,5)^{3x} + 3 \cdot 2^{x+3} = 125 - 24 \cdot (0,5)^x$

5. $5^{3x} + 9 \cdot 5^x + 27 \cdot (5^{-3x} + 5^{-x}) = 64$

VẤN ĐỀ 3. SỬ DỤNG TÍNH ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN

Dạng 1:

Ví dụ. Giải phương trình: $4^x + 3^x = 5^x$ (1)

Giải:

Chọn 1: Ta nhận thấy $x = 2$ là một nghiệm của PT (1), ta sẽ chứng minh nghiệm này duy nhất

Chia 2 vế của phương trình cho 5^x , ta có: $\left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$ (1')

+ Với $x > 2$, ta có: $\left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2$; $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2$. Suy ra: $\left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$

Điều này chứng tỏ (1') (hay(1)) không có nghiệm $x > 2$.

+ Với $x < 2$, ta có: $\left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2$; $\left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2$. Suy ra: $\left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$

Điều này chứng tỏ (1') (hay(1)) không có nghiệm $x < 2$.

Vậy phương trình cho có duy nhất một nghiệm $x = 2$.

Chọn 2: Ta thấy $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1), ta chứng minh nghiệm này duy nhất

ta đặt $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$. Hàm số $f(x)$ x c nh v i mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{4}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln \frac{3}{5} < 0, \forall x$. Như vậy hàm số $f(x)$ đồng biến $\forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó: + Nếu $x > 2$ thì $f(x) > f(2) = 1$

+ Nếu $x < 2$ thì $f(x) < f(2) = 1$. Vậy phương trình cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài tập tương tự:

1. $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$

2. $2^x + 3^x = 5^x$

3. $4^x = 3^x + 1$

4. $7^{\frac{x}{2}} + 3^x = 4^x$

- | | | | |
|--|---|--|--------------------------|
| 5. $8^{\frac{x}{2}} + 1 = 3^{\frac{x}{2}}$ | 11. $4^x + 9^x = 25^x$ | 18. $\frac{2^x + 3^x}{3^x + 4^x} \leq \frac{5}{7}$ | $3^x + 4^x + 8^x < 15^x$ |
| 6. $1 + 7^{\frac{x}{3}} = 2^x$ | 12. $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$ | 19. $4^x + 9^x + 16^x = 81^x$ | $6^x + 8^x = 10^x$ |
| 7. $3^x - 4 = 5^{\frac{x}{2}}$ | 13. $2^x + 3^x + 1 > 6^x$ | 20. $(6 - 4\sqrt{2})^x + (17 - 12\sqrt{2})^x + (34 - 24\sqrt{2})^x \geq 1$ | |
| 8. $15^{\frac{x}{2}} + 1 = 4^x$ | 14. $2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x + 1 < 6^x$ | 21. $4^x + 9^x + (\sqrt{32})^x = 13^x$ | |
| 9. $2^{\frac{x}{2}} + 1 = 3^{\frac{x}{2}}$ | 15. $3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}$ | 22. $(\sqrt{4 + \sqrt{15}})^x + (\sqrt{4 - \sqrt{15}})^x = (2\sqrt{2})^x$ | |
| 10. $4^x + 3^x = 5\sqrt{5^x}$ | 16. $4 \cdot 3^x - 4^{1-x} = 11$ | 23. $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 2^x$ | |
| | 17. $2^x + 3^x + 5^x = 38$ | | |

1. Giải phương trình:

- | | |
|--|---|
| 1. $x^2 + 3^{\log_2 x} = x^{\log_2 5}$ | 3. $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$ |
| 2. $4^{\log_3 x} = 2 + x^{\log_3 2}$ | 4. |

2. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình sau luôn có nghiệm: $2^{\sin^2 x} + 3 \cos^2 x \geq m \cdot 3^{\sin^2 x}$
 Dạng 2:

- | | | |
|-----------------------|---|---------------------------|
| 1. $4^x + 3x - 7 = 0$ | 6. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 6$ | 9. $3^x + 5^x = -6x + 2$ |
| 2. $3^x + x - 4 = 0$ | 7. $2^x + 2x - 14 = 0$ | 10. $3^x + 2^x = -3x + 2$ |
| 3. $5^x + 4x - 7 = 0$ | 8. $7^x + 6^x = -11x + 2$ | |
| 4. $2^x = 3 - x$ | | |
| 5. $5^x + 2x - 7 = 0$ | | |

Dạng 3: f(x) đồng biến (nghịch biến), $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

- | | |
|--|---|
| 1. $2^{\cos^2 x} - 2^{\sin^2 x} + \cos 2x = 0$ | 5. $2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$ |
| 2. $e^{\cos^2 x} - e^{\sin^2 x} = \cos 2x$ | 6. $2^{2x-1} + 3^{2x} + 5^{2x+1} = 2^x + 3^{x+1} + 5^{2x+1}$ |
| 3. $2^{\sqrt{x^2-3x+1}} - 2^{x-2} + \sqrt{x^2-3x-x+3} = 0$ | 7. $7^{\log_5(x-1)} - 5^{\log_7(x+1)} = 2$ |
| 4. $2^{x^2-3x+1} - 2^{x-2} + x^2 - 4x + 3 = 0$ | |

VẤN ĐỀ 4. NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ

Giải các phương trình sau:

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 1. $2^{ x } = \sin x^2$, | 4. $5^{x^2} = \cos 3x$ | 7. $2^{x^2} + (\sqrt{3})^{x^2} = 2^{1-x^2}$ |
| 2. $\sqrt[4]{16-x^2} = 2^x + 2^{-x}$ | 5. $3^x + 2^x = -3x^2 + 2$ | 8. $2^{x^2} + 3^{x^2} + 7^{x^2} + 8^{x^2} = 4^{1-x^2}$ |
| 3. $3^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4$ | 6. $2^{x^2} + 3^{x^2} + 4^{x^2} = 3$ | 9. $2^{x^2} + 4 \cdot 10^{x^2} = 7 - 3^{x^2}$ |

VẤN ĐỀ 5. PHƯƠNG PHÁP LÔGARÍT HOÁ

Ví dụ. Giải phương trình: $3^x \cdot 2^{x^2} = 1$

Giải: $\log_3(3^x \cdot 2^{x^2}) = \log_3 1 \Leftrightarrow x + x^2 \log_3 2 = 0 \Leftrightarrow x(1 + x \log_3 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{\log_3 2} = -\log_2 3 \end{cases}$

- | | | | |
|---|--|---|---|
| 1. $2^x = 3^{x+1}$ | 11. $2^{x-1} > \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{x}}$ | 20. $42.4^x - 63.9^x = 0$ | $x^{\frac{1}{\lg x}} = 10^{x^4}$ |
| 2. $2^{x^2-4} = 3^{x-2}$ | 12. $2^{x^2-2x} \cdot 3^x = 1,5$ | 21. $9^{- x } = \left(\frac{1}{2}\right)^{ x+1 + x-1 }$ | $x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{5+\lg x}$ |
| 3. $25.3^x > 81.5^x$ | 13. $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36$ | 22. $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$ (KT 98) | $x^{\log_2 x} < 32$ |
| 4. $2^{x-3} = 5^{x^2-5x+6}$ | 14. $3^x \cdot 2^{\frac{x+1}{x-1}} = 72$ | 23. $x^{3-\log_3 x} = 900$ | $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10$ |
| 5. $3^{x-3} = 5^{x^2-7x+12}$ | 15. $3^{2^x} = 2^{3^x}$ | 24. $x^{\lg x} = 1000x^2$ | $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x - 3} = x^2$ |
| 6. $5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100$ | 16. $5^{7^x} = 7^{5^x}$ | 25. $x^{\lg^2 x + \lg x - 4} > 10000$ | $x^{\log_2 x^2 - 3} \geq \frac{1}{2}$ |
| 7. $4.9^{x-1} = 3.2^{\frac{2x+1}{2}}$ | 17. $\left[15^{x^2+x-2}\right]^{(x-4)} = 1$ | 26. $x^{(\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x} = 3^{8-3 \log_2 \sqrt{2}^4}$ | |
| 8. $9.2^{2x} = 8\sqrt{3^{2x+1}}$ | 18. $8^{\frac{x}{x+2}} = 4.3^{4-x}$ | 27. $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x$ | |
| 9. $x^{10+\frac{1}{5}\lg x} = \sqrt{x}$ | 19. $5^{x-1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 245$ | 28. $2^x + 2^{x-2} + 2^{x-1} = 7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2}$ | |
| 10. $x^x = 10^{x-x^2}$ | | | |

VẤN ĐỀ 6. MỘT SỐ DẠNG KHÁC

Loại 1: Giải bất phương trình:

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{4^x + 2x - 4}{x-1} \leq 2$ (HVH 97) | 3. $\frac{3^{2-x} + 3 - 2x}{4^x - 2} \geq 0$ (Luật 96) |
| 2. $\frac{2^{1-x} - 2x + 1}{2^x - 1} \leq 0$ | 4. $\frac{3^{1-x} - 3x + 2}{2^x - 1} \leq 0$ (Q.Y 96) |

Loại 2: Bình phương

- | | |
|---|--|
| 1. $\sqrt{2(5^x + 24)} - \sqrt{5^x - 7} \geq \sqrt{5^x + 7}$ | 3. $\sqrt{8 + 2^{1+\sqrt{3-x}} - 4^{\sqrt{3-x}}} + 2^{1+\sqrt{3-x}} > 5$ |
| 2. $\sqrt{2(13^x + 12)} - \sqrt{13^x - 5} \geq \sqrt{13^x + 5}$ | |

Loại 3: $a^{f(x)} + a^{f(x)} \cdot a^{g(x)} (a^{f(x)}/a^{g(x)}) + a^{g(x)} + b = 0$. PP: $ta^{f(x)} = u, a^{g(x)} = v$.

- | | |
|--|--|
| 1) $2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2 \cdot 2^{6-5x} + 1$ | 3) $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7}$ |
| 2) $4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1$ | 4) $4^{x^2-2x+1} + 1 = 2^{(x+1)^2} + 2^{x^2-6x+1}$ |

Loại 4:

- | | |
|--|--|
| 1. $2^{\frac{\log_1^2 x}{2}} + x^{\frac{\log_1 x}{2}} > \frac{5}{2}$ | 2. $x^{\log_2 x} + 16x^{-\log_2 x} < 17$ |
|--|--|

VẤN ĐỀ 7. MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

1. Tìm m để bất phương trình có nghiệm:

$$1) 3^{x^2} \geq 1 + m^2 \quad 2) 3^{|x-1|} \leq 1 - m^2 \quad 3) 5^{-|x|} \geq 1 + m^2 \quad 4) \frac{1}{4^{|x-2|}} = 2m - 1$$

2. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{array}{ll} 1) 9^x + 3^x + m = 0 & 5) 2^x + (m+1) \cdot 2^{-x} + m = 0 \\ 2) 9^x + m \cdot 3^x - 1 = 0 & 6) 16^x - (m-1) \cdot 2^{2x} + m - 1 = 0 \\ 3) 9^x + m \cdot 3^x + 1 = 0 & 7) 25^x - 2 \cdot 5^x - m - 2 = 0 \\ 4) 3^{2x} + 2 \cdot 3^x - (m+3) \cdot 2^x = 0 & 8) 25^x + m \cdot 5^x + 1 - 2m = 0 \end{array}$$

3. Vẽ hình ngũ giác đều có các đỉnh sau các nghiệm phân biệt $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|} = m^4 - m^2 + 1$

4. Cho phương trình: $4^x - (2m+1)2^x + m^2 + m = 0$

a) Giải phương trình với $m = 1$; $m = 1$; $m = -\frac{1}{2}$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm? c) Giải và biện luận phương trình cho.

5. Cho phương trình: $m \cdot 4^x - (2m+1) \cdot 2^x + m + 4 = 0$

a) Giải phương trình khi $m = 0$, $m = 1$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm? c) Tìm m để phương trình có nghiệm $x \in [-1; 1]$?

6. (HNN 98) Cho phương trình: $4^x - 4m(2^x - 1) = 0$

a) Giải phương trình với $m = 1$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm? c) Giải và biện luận phương trình cho.

7. Xác định a để phương trình: $\sqrt{a \cdot (2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x$ có nghiệm và tìm nghiệm.

8. Tìm m để phương trình: $m \cdot 4^x - (2m+1) \cdot 2^x + m + 4 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

9. (HCân Thơ 98) Cho phương trình: $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$

a. Giải phương trình khi $m = 2$.

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ; $x_1 + x_2 = 3$.

10. Vẽ hình ngũ giác đều có các đỉnh là nghiệm của phương trình sau có nghiệm: $7^{-|x+3|} - 4 \cdot 7^{\frac{1}{2}|x+3|} - m = 0$

11. Tìm các giá trị của k để phương trình: $9^{-x} - (k-1) \cdot 3^x + 2k = 0$ có nghiệm duy nhất

12. Tìm các giá trị của a để phương trình: $144^{-|x-1|} - 2 \cdot 12^{-|x-1|} + 12a = 0$ có nghiệm duy nhất.

13. Tìm các giá trị của a sao cho phương trình sau có 2 nghiệm dương phân biệt $9^{1-\frac{1}{x^2}} - a \cdot 3^{1-\frac{1}{x^2}} + 2 = 0$

14. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $-1 < x_1 < 0 < x_2$: $\frac{m}{4^x} - \frac{2m+1}{2^x} + m + 4 = 0$

15. (HVCNBCVT 99) Tìm các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng $\forall x > 0$

$$(3m+1) \cdot 12^x + (2-m) \cdot 6^x + 3^x < 0$$

16. Tìm giá trị của tham số a để bất phương trình $4^{|\cos x|} + 2(2a+1)2^{|\cos x|} + 4a^2 - 5 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi x .
17. (GT 98) $m \cdot 4^x + (m-1) \cdot 2^{x+2} + m - 1 > 0; \forall x$
18. (M 98) $9^x - 2(m+1)3^x - 2m - 3 > 0; \forall x$
19. (GT_TPHCM 99) $9^x - m3^x + 2m + 1 > 0; \forall x$
20. (Đ-Que HCM 99) $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3 + m < 0; \forall x$
21. $4^x - (2m+1) \cdot 2^{x+1} + m^2 + m \geq 0; \forall x$
22. $25^x - (2m+5) \cdot 5^x + m^2 + 5m > 0; \forall x$
23. $7^{-|x+3|} - 4 \cdot 7^{-\frac{1}{2}|x+3|} - m > 0; \forall x$.
24. $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3 - 2m < 0; \forall x$
25. $4^{\sin x} + 2^{1+\sin x} > m; \forall x$.
26. (GT_TPHCM 99) $9^x + m \cdot 3^x + 2m + 1 > 0; \forall x$
27. $3^{2x+1} - (m+3) \cdot 3^x - 2(m+3) < 0; \forall x$
28. Tìm mọi giá trị của m để bất phương trình sau thỏa mãn với mọi x : $4^{|\cos x|} + 2(2a+1) \cdot 2^{|\cos x|} + 4a^2 - 3 < 0$
29. Tìm m để bất phương trình $(m^2 + m - 2)4^{\sqrt{1-tg^2 x}} - (m+5)2^{\sqrt{1-tg^2 x}} - 2 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi x .
30. Tìm các giá trị của m để các bất phương trình sau đây nghiệm đúng:
- a. $3^{2x+1} - (m+3) \cdot 3^x - 2(m+3) < 0$
- b. $4^x - (2m+1) \cdot 2^{x+1} + m^2 + m \geq 0$
- c. $9^x - (2m-1) \cdot 3^x + m^2 - m \geq 0$
- d. $3 \cdot 4^x - (m-1) \cdot 2^x - 2(m-1) < 0$
- e. $4^x + m \cdot 2^x + m - 1 \leq 0$.
- f. $m \cdot 25^x - 5^x - m - 1 > 0$
31. Tìm giá trị của m để cho hàm số: $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 3}{(m-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{-\cos^2 x} + 2^{1+\sin^2 x} + 2m}$ nhận giá trị âm với mọi x
32. Cho phương trình: $(5 + 2\sqrt{6})^{tg x} + (5 - 2\sqrt{6})^{tg x} = \alpha \quad (50)$
- a) Giải phương trình với $\alpha = 10$. b) Giải và biện luận pt theo α .
33. Cho phương trình: $\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x + a\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8 \quad (1)$
- a. Giải phương trình khi $a=7$ b. Biện luận theo a số nghiệm của phương trình.
34. (KTHN 99) Cho bất phương trình: $m \cdot 9^{2x^2-x} - (2m+1) \cdot 6^{2x^2-x} + m \cdot 4^{2x^2-x} \leq 0$
- a) Giải bất phương trình với $m = 6$.
- b) Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x mà $|x| \geq \frac{1}{2}$.
4. Giải phương trình: (Đúng tính chất của hàm số - có nghiệm?)
 $2^{3x} + 2^{2x} + (1+3x^2)2^x + x - 2 = 0$
7. Tìm m để phương trình nghiệm đúng: $3^{mx(2-x)} = 4^{|x-1|} + m$

1.
$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} 4^{-2x} + 4^{2y} = \frac{1}{2} \\ x + y = 1 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} 2^y = 200.5^y \\ x + y = 1 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9} \\ y - x = 2 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3x-2y-3} = 1 \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} 27^x = 9^y \\ 81^x = 243.3^y \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} 64^x + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 28 \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75 \\ 3^y \cdot 5^x = 45 \\ 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ \begin{cases} \frac{x}{3^2} - 2 \frac{y^2}{2} = 7 \end{cases} \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7 \\ \begin{cases} x + 2^{y+1} = 3 \\ 4x + 4^y = 32 \end{cases} \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} 3.2^x + 2.3^y = \frac{11}{4} \\ 2^x - 3^y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} 7^x - 16^y = 0 \\ 4^x - 49^y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^5 \cdot 2^{\frac{3y}{x}} \\ 3^y = 3.3^{\frac{2(x-y)}{y}} \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} x + 3^{y-1} = 2 \\ 3x + 9^y = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 4^x + 8 \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0 \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} y^2 = 4^x + 2 \\ 2^{x+2} + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (x+1)^{y^2+y+2} = 1 \end{cases}$$
16.
$$\begin{cases} 2^x - 2^y = y - x \\ 2x^2 + 4x - y^2 = -3 \end{cases}$$
17.
$$\begin{cases} 3^{2x+2} + 2^{2y+2} = 17 \\ 2.3^{x+1} + 3.2^y = 8 \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} |x|^y = 9 \\ (324)^{\frac{1}{y}} = 2x^2 \end{cases} ; \begin{cases} 9^{2\lg x + \cos y} = 3 \\ 9^{\cos y} - 81^{\lg x} = 2 \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} x^{y+4x} = y^{5\left(\frac{y-x}{3}\right)} \\ x^3 = y^{-1} \end{cases} \quad (\text{KT 99})$$
20.
$$\begin{cases} 2^2 + 2^y \leq 1 \\ x + y \geq -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}} 9x - y = 2 \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} 4^{\log_3(xy)} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12 \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3.4^{2y-1} \leq 2 \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3 \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} \sqrt[3]{4} + 2x\sqrt{2} - 6x = 9 \\ x > 0 \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} y^{\frac{1}{2}} = x^{-1} \\ (xy)^x \cdot x^{-y} = y^{\frac{28x-7y}{2}} \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} = (x+y) \frac{1}{x-y} \\ (x+y)2^{y-x} = 48 \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} 3^{|x^2-2x-2| - \log_3 5} = 5^{-(y+4)} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \end{cases} \quad (\text{SP HN})$$
27.
$$\begin{cases} 3^{|x^2-5x+6| - \log_3 2} = 2^{-y-1} \\ 2|y-2| - 5|y| - (y-3)^2 \geq -5 \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} 4^{|x^2-8x+12| - \log_4 7} = 7^{2y-1} \\ |y-3| - 3|y| - 2(y+1)^2 \geq 1 \end{cases}$$
29.
$$\begin{cases} 5^{|x^2-5x+4| - \log_5 2} = 2^{y-3} \\ 3|y| - 5|y+1| + (y-2)^2 \leq 3 \end{cases}$$
30.
$$\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3.2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases} \quad (\text{HSPHN 98})$$
31.
$$\begin{cases} 3^x - 3^y = (y-x)(xy+2) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$
32.
$$\begin{cases} 2^x - 2^y = (y-x)(xy+2) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \quad (\text{QG 95})$$
33.
$$\begin{cases} \cos[\pi(x^2 + y^2)] = 1 \\ 4^{x^2+(1+y)^2} - 32 = 31.2^{x^2+(1+y)^2} \\ y \geq 0 \end{cases}$$
34.
$$\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases} \quad (\text{TC 00})$$
35.
$$\begin{cases} x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 \frac{3x}{2} \\ x \log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 \frac{2y}{x} \end{cases}$$
36.
$$\begin{cases} 2^{3x+y} + 2^{y-2} = 3.2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

1. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot 9^{\frac{x}{y}} = 9^{\frac{x}{2y}} \\ \frac{x+my}{x} = \frac{2x}{y} - 4 \end{cases}$$
 Giải theo a hpt
$$\begin{cases} x+y+a=1 \\ 2^{a^2} \cdot 4^{x+y-xy} = 2 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với $m=3$,

b. Tìm các giá trị của m sao cho hệ có nghiệm duy nhất. Hãy xác định nghiệm duy nhất.

2. Tìm a để hệ sau có nghiệm với mọi b :
$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2 \\ a+bxy+x^2y = 1 \end{cases}$$

3. Xác định a để hệ có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

4. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_3 x^2 + 2 \log y = 0 \\ |x|^3 + y^2 + my = 0 \end{cases}$$

a. Giải hệ pt khi $m=1$. b. Với $m=?$ thì hệ có nghiệm >0

5. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_m(3x+2y) - \log^3(3x-2y) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

a. Giải hệ phương trình (1) với $m=5$. b. Tìm m để hệ (1) có nghiệm (x,y) .

6. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} a^x + a^y = \frac{1}{2} \\ x+y = b^2 - b + 1 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với $b=1$ và $a > 0$ bất kỳ. b. Tìm a để hệ có nghiệm với mọi $x \in [0;1]$

7. Cho bất phương trình: $x+4 < m\sqrt{x+2} \quad (1)$

a. Giải bpt với $m=4$ b. Tìm $m \in \mathbb{Z}$, để nghiệm bpt (1) thỏa mãn bpt $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-12} > 1$

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

❖ PHƯƠNG HÁP ĐƯA VỀ CÙNG MỘT CƠ SỐ

Ví dụ. Giải phương trình: $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$ (1)

Giải:

-a về cơ số 3, ta có: (1) $\Leftrightarrow \log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = 11 \Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = 11$

$\Leftrightarrow \log_3 x = 6 \Leftrightarrow x = 3^6 = 729$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = 729$.

Bài tập tương tự

1. $\log_3(\log_2 x) = 1$
2. $\log_2(x^2 + x - 3)^2 = 0$
3. $\log_2(x^2 - 4x - 5) \leq 4$
4. $\log_{12}(6x^2 - 4x - 54) \leq 2$
5. $\log_{\frac{1}{2}} \log_4(x^2 - 5) > 0$
6. $\log_3(5x^2 + 6x + 1) \leq 0$.
7. $\log_{\frac{1}{2}}(1 + x - \sqrt{x^2 - 4}) \leq 4$
8. $\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2 - 2} - x + 1) \leq 0$
9. $\log_3\left(\sqrt{x^2 - 9} - x + \frac{1}{3}\right) \geq -1$
10. $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$
11. $\log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2$
12. $\log_3(4 \cdot 3^{x-1}) = 2x - 1$
13. $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$
14. $\log_{2x-3} 16 = 2 \quad \log_{2x-3} x = 2$
15. $\sqrt{\log_3 \frac{2x-3}{1-x}} < 1$ (SP Vinh 98)
16. $2 \log_5 \sqrt{5} - 2 = \log_x \frac{1}{5}$
17. $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{3} \log_3 |x-2|\right) = 0 \quad \log_2\left(\frac{1}{|x-1|-1}\right) = 1$
18. $\log_x \sqrt[10]{2} = -0,01 \quad \log_7(2x^2 - 5x + 13) = 2$
19. $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3} \quad \log_2(|x+1| - 2) = -2$
20. $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1 \quad \log_{2x}(x + 62) = 3$
21. $\log_3(x+1)^2 + 2 = \log_3^x \quad 3 \log_3 x - \log_9 x = 5$
22. $\log_2(x-1) + \log_2 x = 1 \quad \log_{x+1}(3x^2 - 3x - 1) = 1$
23. $\log_3 \frac{x+1}{x} = \log_3 \frac{x}{2-x} ; \quad \log_5(x-1) = \log_5 \frac{x}{x+1}$
24. $\lg x = \frac{1}{2} \lg(x+1) ; \quad \log_4 \frac{2x-1}{x+2} < -\frac{1}{2}$ (HVH 98)
25. $\frac{\lg(\sqrt{x+1} + 1)}{\lg \sqrt[3]{x-40}} = 3 ; \quad \log_5(x-1) = \log_5 \frac{x}{x+1}$
26. $\lg(10^{\lg(x^2-21)}) - 2 = \lg x - 2 \lg 5$
27. $2^{\log_8(x^2-6x+9)} = 3^{2 \log_x \sqrt{x-1}} \quad \log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x-4) = \log_{\frac{1}{3}}(2x+2)$
28. $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$
29. $\log_{x+1}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$
30. $\log_2 x \cdot \log_3 x = \log_2 x^2 + \log_3 x^3 - 6$

31. $\log_7 \frac{2x+3}{21} + \log_{\frac{1}{7}} \frac{2}{3x-6} = 0$
32. $\log_3(1-x) + \log_{\frac{1}{3}} \frac{6}{2-x} = 0$
33. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$
34. $\log_{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{2}\right) + \log_2 \sqrt{2 - \frac{x}{4}} = 0$
35. $\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4} - \frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}$
36. $\log_2 x = 1 + 3\log_2 3 - 3\log_2 \frac{3}{8}$
37. $\log_2 \frac{x^2 + 8x - 1}{x + 1} \leq 2$ (QGHN 99)
38. $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$
39. $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{2}$
40. $\log_3 x + \log_9 3x + \log_{27} x = \frac{5}{3} \left(\frac{11}{12}\right)$
41. $\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = \log_2 5$
42. $1 + 2\log_x 2 \cdot \log_4(10-x) = \frac{2}{\log_4 x}$
43. $\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \lg 3 + \lg 2 = \lg \left(27 - 3^{\frac{1}{x}}\right)$
44. $\log_{2x^2-1} \left(x^2 - \frac{2}{3}\right) = 2 - \frac{1}{\log_3(2x^2-1)}$
45. $\lg(2x-3)^2 - \lg(3x-2)^2 = 2$
46. $\lg x + \lg(x-1) = \lg(5-6x) - \lg 2$
47. $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$
48. $1 + \lg(1+x^2-2x) - \lg(1+x^2) = 2\lg(1-x)$
49. $2 + \lg(1+4x^2-4x) - \lg(19+x^2) = 2\lg(1-2x)$
50. $2\lg\left(x + \frac{1}{2}\right) - \lg(x-1) = \lg\left(x + \frac{5}{2}\right) + \lg 2$
51. $\lg\left(x + \frac{4}{3}\right) - \lg\left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\lg(x+6) - \frac{1}{2}\lg x$
52. $(x-4)^2 \log_4(x-1) - 2\log_4(x-1)^2 = (x-4)^2 \log_{x-1} 4 - 2\log_{x-1} 16$
53. $\log_2^{(x^2+3x+2)} + \log_2^{(x^2+3x+12)} = 3 + \log_2^3$
54. $\log_3(x+2)^2 + \log_3 \sqrt{x^2+4x+4} = 9$
55. $\log_5 x^3 + 3\log_{25} x + \log_{\sqrt{125}} \sqrt{x^3} = \frac{11}{2}$
56. $\log_{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{2a-x}}{a} - \log_{\frac{1}{a}} x = 0$
57. $\log_3^x + \log_{\sqrt{3}}^x + \log_{\frac{1}{3}}^x = 6$ $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$
58. $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$. $\log_2 x - \log_{16} x = 3$
59. $\log_{|x|}^{(x^2+4x-3)} = 3$; $\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}}) = -1$
60. $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20)$
61. $\log_3\left(\frac{3}{x}\right) \cdot \log_2 x - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$
62. $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$; $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$
63. $\log_4 \log_2^x + \log_2 \log_4^x = 2$; $x + \lg(1+2^x) = x \lg 5 + \lg 6$
64. $3 + \frac{1}{\log_{32} \frac{x}{2}} = \log_{\frac{x}{2}} \left(\frac{75x}{4} - \frac{11}{2}\right)$
65. $\log_{2x^2+6x+8} \log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x) = 0$;
66. $\log_2^x + \log_3^x + \log_4^{(x+1)} = \log_{10}^x$
67. $\log_{2x} \left(\frac{32}{x} - 16x\right) = \frac{1}{\log_{56} 2x} - 3$

68. $\frac{1}{3} \log_2(5-x) + 2 \log_8 \sqrt{3-x} = 1$ 75. $\log_4 \{2 \log_3 [1 + \log_2(1 + 3 \log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$
69. $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$ $\log_\pi \log_2 \log_7 x \leq 0$ 76. $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20)$
70. $\frac{1 + 2 \log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2 \log_x 3 \cdot \log_9(12-x)$ 77. $\log_2(x^2 + 3x + 2) + \log_2(x^2 + 7x + 12) = 3 + \log_2 3$
71. $\log_4 \{2 \log_3 [1 + 3 \log_2 x]\} = \frac{1}{2}$ 78. $2 \log_3(x-2)^2 + (x-5)^2 \log_{x-2} 3 = 2 \log_{x-2} 9 + (x-5)^2 \log_3(x-2)$
72. $(x-1) \log_5^3 + \log_5^{(3^{x+1}+3)} = \log_5^{(11 \cdot 3^x - 9)}$ 79. $\log_9(x^2 - 5x + 6)^2 = 2^{-1} \cdot \log_{\sqrt{3}} \frac{x-1}{2} + \log_3|x-3|$
73. $\log_3(x+1) + \log_4(x+1) = \log_5(x+1)$ 80. $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 0$; $\log_4 \log_2 \log_{\sqrt{5}}^x = \frac{1}{2}$
74. $\log_a \{1 + \log_b [1 + \log_c (1 + \log_d x)]\} = \frac{1}{2}$

❖ PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN SỐ PHỤ

Loại 1:

Ví dụ. Giải phương trình: $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

Giải:

Để phương trình có nghĩa, ta phải có: $\lg x \neq 5$ và $\lg x \neq -1$. $t = \lg x = t^*$ ($t \neq 5, t \neq -1$), ta có phương trình

$$\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} = 1 \Leftrightarrow 1+t+2(5-t) = (5-t)(1+t)$$

$$\Leftrightarrow 1+t+10-2t = 5+5t-t-t^2 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t = \frac{5-1}{2} = 2 \\ t = \frac{5+1}{2} = 3 \end{cases}$$

Ta thấy 2 nghiệm trên đều thỏa mãn điều kiện của t. Do đó:

+ Với $t = 2$, thay vào (*) ta có: $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$.

+ Với $t = 3$, thay vào (*) ta có: $\lg x = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 = 1000$.

Vậy phương trình cho có 2 nghiệm $x = 100$ và $x = 1000$.

Bài tập tự.

Loại 1:

1. $4 \cdot \log_4^2 x + 2 \log_4 x^2 + 1 = 0$
2. $\log_x 5\sqrt{5} - 1,25 = \log_x^2 \sqrt{5}$
3. $\log_x^3 10 + \log_x^2 10 - 6 \log_x^{10} = 0$
4. $\log_2(5^x - 1) \cdot \log_4^2(5^x - 1) = 1$

5. $\log_2(2x)^2 \cdot \log_x^2 2 = 1$
6. $\log_2(3^x + 3) - 4 \cdot \log_{3^{x+3}} 2 = 0$
7. $\log_{\frac{2}{x}} 2 + \log_2 4x = 3$
8. $3 \lg x^2 - \lg^2(-x) = 9$
9. $\lg x^2 + 9 \lg^2 x = 40$
10. $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0$
11. $\log_3(4^x + 1) + \log_{4^{x+1}} 3 > \frac{5}{2}$
12. $\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} = 2$
13. $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$
14. $\log_x 2 - \log_{4x} \frac{7}{26} = 0$
15. $5 \cdot \sqrt{\log_2 x} - \log_2 4x - 4 = 0$
16. $(\log_5 x)^2 + \frac{1}{2} \log_5 5x - 2 = 0$
17. $\log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 = 3$
18. $\log_2^2 x + 3 \geq 2 \log_2 x^2$
19. $2 \log_3(2x + 1) = 2 \cdot \log_{2x+1} 3 + 1$
20. $\log_2(2x)^2 \cdot \log_x^2 2 < 1$
21. $\frac{2 \lg x}{\lg x - 1} = -\lg x + \frac{2}{\lg x - 1}$
22. $4^{\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0$
23. $4^{\log_3 x} - 5 \cdot 2^{\log_3 x} + 2^{\log_3 9} = 0$
24. $2^{\log_2^2 x + 1} = x^{2 \log_2 x} - 48$
25. $2^{\log_2^2 x + 1} + 224 = x^{2 \log_2 x}$
26. $\log_2^2(2 - x) - 8 \log_{\frac{1}{4}}(2 - x) \geq 5$
27. $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 |x - \sqrt{x^2 - 1}|$
28. $\log_{\sqrt{x}} 2 + 4 \log_4 x^2 + 9 = 0$ $\log_2 |x + 1| - \log_{x+1} 64 = 1$
29. $2^{2 \log_3(x^2 - 16)} + 2^{\log_3(x^2 - 16) + 1} = 24$ $3 \sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$
30. $5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{\log_5 2 + x}$; $2 \cdot \log_2^2 x - 3 \cdot \log_2 \frac{x}{4} - 11 = 0$
31. $2 \log_5^x - \log_x^{125} < 1$; $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 > 0$
32. $\log_2^2(x + 1)^3 - \log_2^{(x+1)} - 4 < 0$; $3 \lg x^2 - \lg^2(-x)^2 = 9$
33. $\lg(10x) \cdot \lg(0,1x) = \lg x^3 - 3$; $4 \log_4^2(-x) + 2 \log_4^{x^2} + 1 < 0$
34. $\log_3 a - \log_x a = \log_{\frac{x}{3}} a$; $8 \lg^3 x - 9 \lg^2 x + \lg x = 0$
35. $\left| \log_{\frac{1}{3}} x - 2 \right| + 3 = \left| \log_{\frac{1}{3}} x + 1 \right|$;
36. $\log_a(ax) \cdot \log_x(ax) = \log_{a^2} \frac{1}{a}$
37. $1 + \log_{27}(x^{\log_{27} x}) = \frac{10}{3} \log_{27} x$
38. $\lg^4(x - 1)^2 + \lg^2(x - 1)^3 = 25$ (YHN 00)
39. $2 \log_4(3x - 2) + 2 \cdot \log_{3x-2} 4 = 5$
40. $5 \cdot \log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{x}{9}} x^3 + 8 \log_{9x^2} x^2 = 2$
41. $\sqrt{\log_9(3x^2 - 4x + 2)} + 1 > \log_3(3x^2 - 4x + 2)$ (SPHN 00)
42. $\log_2^2(x - x^2 + 2) + 3 \log_{\frac{1}{2}}(x - x^2 + 2) + 2 \leq 0$
43. $\log_2 \sqrt{|x|} - 4 \sqrt{\log_4 |x|} - 5 = 0$ (C SPHN 97)
44. $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(21 + 23x + 6x^2) = 4$
45. $\log_{1-2x}(1 - 5x + 6x^2) + \log_{1-3x}(1 - 4x + 4x^2) = 2$
46. $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \cdot \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 |x - \sqrt{x^2 - 1}|$

Loại 2: đôi khi t n phụ nh-ng ph-ong trình vẫn chứa n ban đầu.

1. $\lg^2 x - \lg x \cdot \log_2 4x + 2\log_2 x = 0$
2. $\log_5^2(x+1) + (x-5)\log_5^{(x+1)} - 16 = 0$
3. $\log_2^2 x + (x-4)\log_2^x + 3 - x = 0$
4. $\log_2^2 x + (x-5) \cdot \log_2 x - 2x + 6 = 0$
5. $(x+2)\log_3^2(x+1) + 4(x+1)\log_3(x+1) - 16 = 0$
6. $(x+3)\log_3^2(x+2) + 4(x+2)\log_3(x+2) - 16 = 0$
7. $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x + 2x - 6 = 0$. (TS 97)

Loại 3:

1. $\log_2^2 x - \log_2^x + \log_3^x - \log_2^x \cdot \log_3^x = 0$
2. $2\log_2(x^2 - x) + \log_2^x - \log_2^x \cdot \log_2^{(x^2-x)} = 2$

Loại 4:

- 4.1) $\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) + 3\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 2$
- 4.2) $\sqrt[3]{2 - \lg x} = 1 - \sqrt{\lg x - 1}$
- 4.3) $\sqrt[3]{1 - \log_3^x} + \sqrt[3]{1 + \log_3^x} = 1$
- 4.4) $\sqrt{3 + \log_4^{(x^2-4x)}} + 2\sqrt{5 - \log_4^{(x^2-4x)}} = 6$
- 4.5) $x + \sqrt{1 - \lg^2 x} = 10$
- 4.6) $\log_2^3 x + 2 = 3\sqrt[3]{3\log_3^x - 2}$
- 4.7) $\log_2^2 x + \sqrt{\log_2 x + 1} = 1$
- 4.8) $6^x = 3\log_6^{(5x+1)} + 2x + 1$
- 4.9) $7^{x-1} = 6 \cdot \log_7^{(6x-5)} + 1$

❖ PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ LÔGARIT

Loại 1:

1. $\log_2(3x - 1) = -x + 1$
2. $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$
3. $x + \log_3^x = 4$
4. $2x + \log_{\frac{x}{2}} = 5$

Loại 2: Phương trình không có nguyên số.

VĐ1. Giải phương trình:

1. $2^{\log_5^{(x+3)}} = x$
2. $2^{\log_5(x+3)} = x$
3. $3^{\log_2^{(x-3)}} = x$
4. $\log_3^x \leq \log_7^x$
5. $\log_2^{(x+1)} \geq \log_5^{2x}$
6. $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$
7. $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$
8. $\log_3 \sqrt{x^2 + 1} > \log_2^{(-2x-2)}$
9. $2\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4 \sqrt{x}$
10. $\log_2(\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}) = \frac{1}{4}\log_3 x$
11. $2 \cdot \log_3 \cot x = \log_2 \cos x$

Loại 3: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$, (f - đồng biến hoặc nghịch biến)

1. $\log_3(x^2 + x + 1) - \log_3 x = 2x - x^2$.
2. $2^x - 2^{1-x} = \log_2 \frac{1-x}{x}$

1. Tìm k để phương trình có đúng 3 nghiệm: $4^{-|x-k|} \cdot \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2|x-k| + 2) = 0$

Tìm m để phương trình có nghiệm. 1) $\log_{3\sqrt{2}}(\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5}) = a$; 2) $\log_2(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x}) = a$

Lập bảng xét dấu:

- | | |
|---|---|
| 1. $\frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)^3}{x^2 - 3x + 4} > 0$ | 3. $\frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)}{x^2 - 3x - 4} > 0$ |
| 2. $\frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)^3}{x^2 + 3x - 4} > 0$ | 4. $\frac{\log_2(x+1) - \log_3(x+1)^3}{x^2 + 3x - 4} > 0$ |

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CHỨA THAM SỐ

- Tìm các giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt
 - $\log_3(9^x + 9a^3) = 2$
 - $\log_2(4^x - a) = x$
- (H 86) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn: $4 < x_1 < x_2 < 6$:

$$(m-3)\log_{\frac{1}{2}}(x-4) - (2m+1)\log_{\frac{1}{2}}(x-4) + m + 2 = 0$$
- Tìm các giá trị của a để phương trình sau có 2 nghiệm thỏa mãn: $0 < x_1 < x_2 < 2$:

$$(a-4)\log_2(2-x) - (2a-1)\log_2(2-x) + a + 1 = 0$$
- Tìm các giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 > 1$:

$$2\log[2x^2 - x + 2m(1-2m)] + \log_{1/2}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$$
- (HKTHN 98) Cho phương trình: $(x-2)^{\log_2 4(x-2)} = 2^\alpha (x-2)^3$
 - Giải phương trình với $\alpha = 2$
 - Xác định các giá trị của α để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{5}{2} \leq x_1, x_2 \leq 4$.
- Vì giá trị nào của a thì phương trình sau có nghiệm duy nhất
 - $\log_{\sqrt{3}}(x+3) = \log_3 ax$
 - $2\lg(x+3) = 1 + \lg ax$
 - $\lg(x^2 + ax) = \lg(8x - 3a + 3)$
 - $\frac{\lg kx}{\lg(x+1)} = 2$
 - $\lg(x^2 + 2kx) - \lg(8x - 6k - 3)$
 - $\lg(2x - a - 1) + \log_{\frac{1}{10}}(x^2 + 4ax) = 0$
 - $\log_{\sqrt{5}+2}(x^2 + mx + m + 1) + \log_{\sqrt{5}-2} x = 0$
 - $\log_{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}(x - m + 1) + \log_{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}(mx - x^2) = 0$
- Tìm các giá trị của m sao cho phương trình sau nghiệm đúng với mọi x:

$$\log_{a^2+2}\left(3 - \sqrt{m-1}\right) - \log_2\left(m^3 x^2 - 5m^2 x^2 + \sqrt{6-m}\right) = 0$$
- Tìm các giá trị của m để hàm số sau xác định với mọi x: $y = 2^{\log_3[(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 2m-1]}$
- $\left(2 - \log_2 \frac{a}{a+1}\right)x^2 + 2\left(1 + \log_2 \frac{a}{a+1}\right)x - 2\left(1 + \log_2 \frac{a}{a+1}\right) > 0; \forall x$
- (AN 97) $\log_2(7x^2 + 7) \geq \log_2(mx^2 + 4x + m); \forall x$

13. Tìm $\alpha \in (2; 7)$, bi chứng PT sau có nghiệm thuộc $[1; 2]$: $\log_3 \left[1 + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{2} \right) \right] = |\cos \alpha x| - 1$

14. $\log_{\frac{1}{6}} \left(\sin \frac{x}{2} - 3 \tan x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) + \log_6 \left(\sin \frac{x}{2} - 3 \tan 2x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = 0$

15. $\log_{\frac{1}{5}} \left(\cos \frac{x}{2} + \tan 2x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) + \log_5 \left(\cos \frac{x}{2} + 3 \tan x - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = 0$

16. $\log_{\frac{1}{3}} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos 2x \right) + \log_3 \left(\sin \frac{x}{2} - \sin x \right) = 0$

17. (HVKTQS 97) $\log_{\frac{6x-x^2}{10}} (\sin 3x + \sin x) = \log_{\frac{6x-x^2}{10}} (\sin 2x)$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

B i 1. Giải các phương trình và bất phương trình sau:

1. $\left(\frac{1}{2} \right)^{4x^2-15x+13} < \left(\frac{1}{2} \right)^{4-3x}$

13. $3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\frac{1}{3} \right)^{x-|x-1|}$ (BKHN 97)

2. $5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$

14. $2^{x^2-3x-4} < 3^{x^2-3x-4}$; $5^{\log_3 \frac{2}{x+2}} < 1$

3. $7^x - 5^{x+2} < 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}$.

15. $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$; $9^{-|x|} = \left(\frac{1}{2} \right)^{x+1+|x-1|}$

4. $5^{x^2-7x+12} > 1$; $\log_{\frac{1}{x-1}} 0,4 > 0$

16. $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x$

5. $\log_x \left(x - \frac{1}{4} \right) \geq 2$ (HHU 98)

17. $5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$

6. $\log_{x\sqrt{3}} (5x^2 - 18x + 16) > 2$

18. $7^x - 5^{x+2} < 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}$.

7. $\log_{\frac{3x}{x^2+1}} \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \right) \geq 0$ $(x^2 - 4) \cdot \log_{\frac{1}{2}} x > 0$

19. $\log_{x-\sqrt{2}} \frac{x+7}{x-2} \leq \log_{x-\sqrt{2}} 2x$

20. $5^{1+x} - 5^{1-x} > 24$ $9^x - 2 \cdot 3^x - 15 > 0$

8. $(4x^2 - 16x + 7) \cdot \log_2(x - 3) > 0$

21. $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2x+3} + 2 \geq 0$

9. $(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2) \cdot \log_2(x^2 - x) = 0$

22. $3^{4-3x} - 35 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{2-3x} + 6 \geq 0$

10. $\log_5[(2^x - 4)(x^2 - 2x - 3) + 1] > 0$

23. $8^{\lg x} - 19 \cdot 2^{\lg x} - 6 \cdot 4^{\lg x} = 24 > 0$

11. $\log_{x-\sqrt{2}} \frac{x+7}{x-2} \leq \log_{x-\sqrt{2}} 2x$

24. $5 \cdot 36^x - 2 \cdot 81^x - 3 \cdot 16^x \leq 0$.

12. $2^{x-1} > \left(\frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{x}}$; $3^{4x^2-3x+\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{3} \right)^{-40x^2}$

25. $25^{-x^2+2x+1} + 9^{-x^2+2x+1} \geq 34 \cdot 15^{-x^2+2x}$

26. $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{4}} x - \log_2 x + 2 \right) < 1$
27. $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12$; $\frac{\lg(\sqrt{x+1}+1)}{\lg \sqrt[3]{x-40}} = 3$
28. $\frac{11.3^{x-1} - 31}{4.9^x - 11.3^{x-1} - 5} \geq 5$; $\log_x(8+2x) < 2$
29. $\frac{4 - 7.5^x}{5^{2x+1} - 12.5^x + 4} \leq \frac{2}{3}$
30. $\frac{\log_{\sqrt{2}}(x-3)}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$; $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_2(x-4) - 1} \geq 0$
31. $\frac{\lg(2x+4)}{\lg(4x+7)} = 2$; $\frac{\lg(x^2 - 3x + 2)}{\lg x + \lg 2} > 2$
32. $\log_8(x-2) - 6\log_8(x-1) > -2$.
33. $\log_2(x+1) - \log_{x+1} 64 < 1$
34. $\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2-2} - x + 1) \leq 0$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{x+1} \geq -1$
35. $\log_2(2-x-\sqrt{x^2-2}) \geq 1$
36. $3^{\lg x+2} < 3^{\lg x^2+5} - 2$; $\log_{\frac{1}{5}} x = x - 6$
37. $\left| \log_2 \left(x + \frac{3}{x} \right) \right| + \log_2 \left(x - \frac{3}{x} \right) = 3$ (SPHN 94)
38. $\log_{\frac{1}{5}} x + \log_4 x \geq 1$ $\log_{x^2}(3-2x) > 1$
39. $\log_{\sqrt{2x-1}} |2x-3| = 2\log_8 4 + \log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
40. $\log_3 \left(\log_4 \frac{3x-1}{x+1} \right) \leq \log_{\frac{1}{3}} \left(\log_{\frac{1}{4}} \frac{x+1}{3x-1} \right)$
41. $\log_x \frac{3}{8-2x} > -2$ $\log_{x^2} \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2}$
42. $\frac{\log_a(35-x^2)}{\log_a(5-x)} > 0$ ($0 < a \neq 1$)
43. $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3(3^{x+1} - 3) = 6$
44. $x + \lg(x^2 - x - 6) + \lg(x + 2)$
45. $2(\lg x)^2 + (1 - \sqrt{2})\lg x^2 = 2\sqrt{2}$
46. $(\log_2 x)^2 + \sqrt{3} = 2(1 + \sqrt{3})\log_2 \sqrt{x}$
47. $\log_2(2-x) - 8\log_{\frac{1}{4}}(2-x) \geq 5$
48. $\log_5(6-x) + 2\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6-x) + \log_3 > 270$
49. $\log_4 \sqrt[3]{x} - \log_2 x > 2$; $\frac{\lg(x^2-1)}{\lg(x-1)} < 1$
50. $\log_3 \sqrt{x} - 2\log_9 x > 2$
51. $15\log_5 \sqrt[5]{x} - 2\log_{\sqrt{5}} x > 6$
52. $2\log_7 \sqrt{x} - 2\log_{\sqrt{7}} x > 4$
53. $\lg \sqrt{1+x} + 3\lg \sqrt{1-x} = \lg \sqrt{1+x^2} + 2$
54. $3\log_2 \sqrt[3]{x} - 4\log_4 x > 2$;
55. $\log_5(1-2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}}(x+1)$;
56. $\log_3(x^2-2) < \log_3 \frac{3}{2}|x|-1$
57. $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(6|x|-3)$
58. $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$
59. $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$
60. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$
61. $\log_2(4x+4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$
62. $\log_{\frac{1}{2}}(4-x) \geq \log_{\frac{1}{2}} 2x - \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$
63. $2 - \log_2(x^2 + 3x) \geq 0$
64. $|3^{\log_2 2x} - 2| - 9^{\log_2 x} + 2 = 0$
65. $\log_{\frac{2}{3}} \log_3 |x-3| \geq 0$ (H Thu Lq 97)
66. $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$; $4^{\frac{\log_1(2x+3)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3(2x^2-1)}$

67. $\log_x(x - \frac{1}{4}) \geq 2$; $\log_x \sqrt{20-x} > 1$

75. $(\frac{1}{9})^{\left[\log_3 \sqrt{x+1} - \frac{1}{2} \log_3(x^2-1)\right]} = \sqrt{2(x-1)}$

68. $\log_2(\lg x + 2\sqrt{\lg x + 1}) - 2\log_4(\sqrt{\lg x + 1}) = 1$

76. $\log_{|x|}(x^2 - \frac{1}{2}x) > 1$; $\log_{\frac{1}{2}}(1-|x|) > \frac{1}{2}$

69. $\log_5(x+5) + 2\log_5 \sqrt{1-3x} > 1$

70. $\log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3$ (H Y HN)

77. $1 + 2\log_x 2 \cdot \log_4(10-x) = \frac{2}{\log_4 x}$

71. $\log_{3x-x^2}(3-x) > 1$ (H DL 97)

78. $\log_2^2(2+x-x^2) + 3\log_{\frac{1}{2}}(2+x-x^2) + 2 \leq 0$

72. $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2$ (H V ăn Lang)

79. $\log_{9x^2}(6+2x-x^2) \geq 4$; $\log_x \sqrt{20-x} > 1$

73. $\log_{x\sqrt{3}}(5x^2 - 18x + 16) > 2$

80. $\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 \geq 0$; $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 3^{\sqrt{x^2-3}} \cdot 28$

74. $\log_x \frac{2x + \frac{2}{5}}{5(1-x)} > 0$; $\log_x \frac{4x+1}{6(x+1)} < 0$

B i 2. Giải các phương trình và bất phương trình sau:

1. $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x > x + 4$

12. $\frac{\lg(x^2 - 3x + 2)}{\lg x + \lg 2} > 2$; $\frac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \frac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x}$

2. $(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1$

13. $\log_3 \log_{\frac{9}{16}}(x^2 - 4x + 3) \leq 0$; $\log_{\frac{8}{3}}(\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 6)) \geq 0$

3. $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1} \geq 0$

14. $\frac{\lg(2x+4)}{\lg|4x+7|} = 2$; $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$

4. $\log_{\frac{3}{2}} \left[\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x^2}{2} + 2^{\log_2 x - 1} \right) + 3 \right] \leq 0$

15. $|3^{\log_2^2 x} - 9| - 2x^{\log_3 x} = 0$; $\log_{9-x^2} \cos x \cdot \log_{\frac{1}{2}}(9-x^2) > 1$

5. $6\log_3|1-x| + \log_3^2(x-1) + 5 \geq 0$

16. $\frac{1}{\log_3(x^2 - 7x + 12)} < \frac{1}{\log_3 20}$

6. $\log_x 125x \cdot \log_{25}^2 x < 1$

17. $\log_{\frac{\pi}{6}}(x^2 - 4x + 3) \geq -3$; $\log_{\frac{\pi}{12}}(\frac{1}{6}x^2 - x + \frac{33}{24}) \geq 0$

7. $\log_4 \cdot \log_2 x + \log_2 \cdot \log_4 x > 1$

8. $5^{\frac{\log_1 \log_2 \cdot 3^{2\log_3 3}}{2}} - 3x + \log_3 9 < 1$

18. $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x - 3} = \frac{1}{x}$; $2 \cdot x^{\log_2 x} + 2 \cdot x^{-3\log_8 x} - 5 = 0$

9. $\log_2 \log_{\frac{1}{2}}(2^x - 4^x) \leq 1$

19. $\frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+2)^3}{x^2 - 3x - 4} > 0$; $(\frac{1}{2})^{\log_{\frac{1}{2}} x} \leq x^3$

10. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > \log_{4x} 2$

20. $\frac{\log_{\sqrt{2}}(x-3)^2}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$; $\log_{12}(6x^2 - 48x + 54) \leq 2$

11. $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 \geq 0$;

21. $\log_{21}(x^2 + 2x - 3) \leq 1$; $\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x) \leq 1$

22. $\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1}} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (x + 1)}$
23. $\frac{\log_3(x + \frac{4}{5})}{\log_7(x^2 - 2x + \frac{7}{16})} < 0$
24. $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1)} + \frac{1}{\log_2 \sqrt{x^2 - 3x + 2}} > 0$
25. $\log_9^2 x > \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x + 1} - 1)$
26. $\log_5 \frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{\log_5 x}{\log_3 \frac{1}{\sqrt{5}}}$
27. $6\log_3 |1 - x| + \log_3^2(x - 1) + 5 \geq 0$
28. $\log_{\frac{1}{2}}(1 - \frac{x}{2}) + \log_2 \sqrt{2 - \frac{x}{4}} = 0$
29. $2\log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4 \sqrt{x}$
30. $\log_3 \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x - 2} > \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}}(x + 3)$
31. $(4 \cdot 3^x + 3^{-x})^{3\log_3(x-1) - \log_3(x-1)(2x+1)} > 1$
32. $\lg^2(1 + \frac{x}{5}) + \lg^2(1 - \frac{5}{x-5}) = 2\lg^2 \frac{1}{x-2}$
33. $\sqrt{3 + 5x - 2x^2} + 3 > 3x \cdot x^{-5} \cdot \sqrt{3 + 5x - 2x^2} + 5x \cdot \log_3[(x+2)(x+4)] + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 7$
34. $\sqrt{3 + 5x - 2x^2} + 3x > 3x \cdot 5^{-x} \sqrt{3 + 5x - 2x^2} + 9x^{\frac{5-x}{5}}$
35. $\log_3(x+2)(x+4) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 7$
36. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x+3) + \log_2(x+3) > -2\log_4 11$
37. $2\log_{25}(1+x)(3-x) - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}}(1+x) > \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}$
38. $\frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0$
39. $\frac{\log_2(x^2 - 2x - 7) - \log_3(x^2 - 2x - 7)^8}{3x^2 - 13x + 4} \leq 0$
40. $\log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + \sqrt{x+1}} + 1} + 1$
41. $\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{9x - x^2} + 3) > \log_3 \frac{27}{\sqrt{9x - x^2} + \sqrt{5 - x^2}} - 3$
42. $x^{\log_2(x+14)} \log_2(x+2) \leq x^6$; $\log_{\text{tg}x} \sin x > 1$
43. $\log_{\cos x} \log_{\sin x} \text{tg}x > 0$; $\log_{\sin x} \log_{\cos x}(\sin x + \cos 2x) > 0$
44. $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$; $\log_3(x-1) + \log_3 \frac{2}{x+1} > \log_9 4$
45. $\log_x(x^2 + 3x - 3) > 1$; $4\sqrt{\log_4 x} - \log_2 \sqrt{x} = 3$
46. $\frac{[\log_{\sqrt{2}}(x-2)]^2}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$; $\frac{\log_5(x+3)}{4x^2 - 16x} \geq 0$
47. $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x - \frac{9}{4} = (\log_x \sqrt{5})^2$
48. $(2x^2 - 11x - 13) \log_{\frac{1}{2}}(7-x) > 0$;
49. $\log_{(x-1)^2}(x+3) > 1$;
50. $\log_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)^2$
51. $\log_{x-3} 2(x^2 - 10x + 24) \geq \log_{x-3}(x^2 - 9)$
52. $2(\log_9 x)^2 = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1} - 1)$ (TL 98)
53. $\log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2(\frac{x^3}{8}) + 9\log_2 \frac{32}{x^2} < 4\log_{\frac{1}{2}}^2 x$
54. $\log_9(x+8) - \log_3(x+26) + 2 = 0$
55. $\log_3[(x+2)(x+4)] + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 7$
56. $\log_a(ax) \cdot \log_x(ax) = \log_{a^2}(\frac{1}{a})$; $a > 0; a \neq 1$
57. $\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4} - \frac{3}{\log_2(1-2x^2)^4}$
58. $\log_{\frac{1}{2}}[(x+1)(x+3)] + \log_2(x+3) > -2\log_4$
59. $2\log_{25}[(x+1)(3-x)] - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}}(1+x) > \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}$

$$60. \frac{\log_5(x^2 - 4x + 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x + 11)}{\sqrt{2 - 5x - 3x^2}} \geq 0$$

$$61. \log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6|x - \sqrt{x^2 - 1}|$$

$$62. \log_{\frac{1}{7}}[(x+2)(4-x)] + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{7}}(4-x) > -2 \log_{49} 3$$

H PHƯƠNG TRÌNH NH LÔGARIT

$$1. \begin{cases} x + y = 2\sqrt{3} \\ \log_3(x \cdot y) = 1 \end{cases} \quad (\text{ĐI Tlong 97})$$

$$2. \begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ x^2 - y = 20 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ \log_{\sqrt{5}(x+y)} = 2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5 \\ 2 \log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3^{x^2+y^2} = 81 \\ \log_2 x + 2 \log_4 y = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ {}_{(4x)} \lg 4 = {}_{(3y)} \lg 3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \log_2 xy = 5 \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 64 \\ \log_x y = 5 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \log_x(3x + 2y) = 2 \\ \log_y(2x + 3y) = 2 \end{cases} \quad (\text{CĐO N 97})$$

$$10. \begin{cases} \log_{xy}(x - y) = 1 \\ \log_{xy}(x + y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 + \log_4 x \\ x^y = 4096 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \log_x y = 2 \\ \log_{x+1}(y + 23) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 4 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 81 \\ \lg(x + y)^2 - \lg^x 2 \lg^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^{\sqrt{y}} + x = y^{\frac{4}{3}} \\ y^{x+\sqrt{y}} = x^{\frac{4}{3}} \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{y+y} = x^3 \end{cases} \quad (x, y > 0)$$

$$15. \begin{cases} \log(x + y) - \log_3(x - y) = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \sqrt{y} + \lg x^2 = 2 \\ y + 4 \lg x = 28 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{y} + 2 \lg x = 3 \\ y - 3 \lg x^2 = 1 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \log_{1+x}(y-1)^2 + \log_{(1-y)}(x+1)^2 = 4 \\ \log_{1+x}(2y+1) + \log_{1-y}(2x+1) = 2 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} (x + 2 \log_{|xy|} 2) \cdot \log_{x+y} |x + y| = 1 \\ x - y = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \log_{|xy|}(x - y) = 1 \\ 2 \log_5 |xy| \cdot \log_{xy}(x + y) = 1 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} y^{1 - \frac{2}{5} \log_{\frac{1}{4}} y} = x^{\frac{2}{5}} \\ 1 + \log_x \left(1 - \frac{3y}{x}\right) = \log_x 4 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} y \cdot x \log_y x = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} {}_2 \log_{\frac{1}{2}}(x + y) = {}_5 \log_5(x + y) \\ \log_2 x + \log_2 y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_2 \frac{x}{y} = -3 \\ \log_2^2 x + \log_2^2 y = 5 \end{cases}$$

24.
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_4 y = 2 \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} \log_2^2 x - \log_2 x^2 < 0 \\ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 9 > 0 \end{cases} \quad (\text{ĐN}) \text{ (Đ ng h)}$$
26.
$$\begin{cases} \log_x(x+2) > 2 \\ \log_2 2^{x-1} + \log_2(2^{x+1} + 1) < \log_2(7 \cdot 2^x + 12) \end{cases}$$
27.
$$\begin{cases} \log_{7-x}(y-4) < 0 \\ \log_{y-1}(3-x) < 0 \end{cases}$$
28.
$$\begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0 \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0 \end{cases}$$
29.
$$\begin{cases} \log_{x-1}(5-y) < 0 \\ \log_{4-y}(2x-2) < 0 \end{cases}$$
30.
$$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy + y - 2x + 2) + \log_{2+y}(x-1)^2 = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - 2\log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases}$$
31.
$$\begin{cases} \log_{1+x}(1-2y+y^2) + \log_{1-g}(1+2x+x^2) = 4 \\ \log_{1+x}(1+2y) + \log_{1-y}(1+2x) = 2 \end{cases}$$
32.
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5-x} < \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \\ x + \frac{1}{3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{SP2'97})$$
33.
$$\begin{cases} \log_6(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) = \frac{1}{4} \log_2 x \\ \frac{\sin \frac{16\pi}{x} + 1}{\cos \frac{\pi x}{16}} < 1 - \cos \frac{\pi \sqrt{x}}{4} \end{cases} \quad (\text{HVQY'97})$$
34.
$$\begin{cases} \log_{|xy|}(x-y) = 1 \\ 2\log_5|xy| \cdot \log_{|xy|}(x+y) = 1 \end{cases}$$
35.
$$\begin{cases} 5\log_2 x = \log_2 y^3 - \log_{\sqrt{2}} 2 \\ \log_2 x = 8 - \log_{\sqrt{2}} x \end{cases}$$
36.
$$\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15 \\ 3^y \cdot \log_2 x = 2 \cdot \log_2 x + 3^{y+1} \end{cases}$$
37.
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = -2\log_{\frac{1}{2}} 4 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5 \lg 10 \end{cases}$$
38.
$$\begin{cases} \log_x(xy) = \log_y x^2 \\ y^{2\log_y x} = 4y + 3 \end{cases}$$
39.
$$\begin{cases} 2(\log_y x + \log_x y) = 5 \\ xy = 8 \end{cases}$$
40.
$$\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+1} + 1) < \lg(7 \cdot 2^x + 12) \\ \log_x(x+2) > 2 \end{cases}$$
41.
$$\begin{cases} x - y = (\log_2 y - \log_2 x)(2 + xy) \\ x^3 + y^3 = 16 \end{cases} \quad (\text{NT-HCM'99})$$
42.
$$\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases}$$
43.
$$\begin{cases} 4^{\frac{x+y}{x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$$
44.
$$\begin{cases} \log_x(3x+2y) = 2 \\ \log_y(3y+2x) = 2 \end{cases} \quad (\text{C 97})$$
45.
$$\begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases} \quad (\text{SPHN'91})$$
46.
$$\begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2y} \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 4 \end{cases}$$
47.
$$\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy) \\ \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0 \end{cases} \quad (\text{SPNN'98})$$

R T G N C C B I U T H C S A U

$$B = 2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad C = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1 \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1 \right)$$

$$D = \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{a^3 b^{-3}} - \sqrt{b^3 a^{-3}} \right) : \left(\frac{a^2 + b^2}{ab} + 1 \right) \right] \cdot \frac{2(a-b)^{-1}}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$E = \left[\left(\frac{a^3 \sqrt{b}}{b^3 \sqrt{a}} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\sqrt{a}}{a^8 \sqrt{b^3}} \right)^2 \right] : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} \right)$$

$$G = \left(\frac{1+x+x^2}{2x+x^2} + 2 - \frac{1-x+x^2}{2x-x^2} \right)^{-1} (5-2x^2)$$

$$H = \left[\left(\frac{2^{\frac{3}{2}} + 27y^{\frac{3}{5}}}{\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{y}} + 3 \cdot \sqrt[10]{32y^2} - 2 \right) \cdot 3^{-2} \right]^5$$

$$H' = \left[\left(\frac{2^{\frac{3}{2}} + 27y^{\frac{3}{5}}}{\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{y}} + 3 \cdot \sqrt[10]{32y^5} - 2 \right) \cdot 3^{-2} \right]^5$$

$$I = \frac{8b-a}{6} \left(\frac{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}{2a^{-\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} + \frac{a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{3}}}{4a^{-\frac{2}{3}} + 2a^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{2}{3}}} \right)$$

Tính giá trị của biểu thức

1. $\log_{\frac{1}{5}} 125$
2. $\log_{\sqrt{2}} 64$
3. ${}_2 \log_8 15$
4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{81} 5}$
5. $\log_{\frac{9}{\sqrt{3}}} 27$
6. $\log_{16} 0,125$
7. $\log_{\frac{1}{29}} 5\sqrt[4]{5}$
8. $\log_{3\sqrt{3}} 729$
9. $\log_{\frac{1}{3}} 5 \cdot \log_{25} \frac{1}{27}$
10. ${}_2 \log_{2\sqrt{2}} 64$
11. $(\sqrt[3]{9})^{\frac{3}{5 \log_5 3}}$
12. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{27} 81}$
13. $10^{3+2 \log_{10} 3}$; 14. $4^{3 \log_8 3 + 2 \log_{16} 5}$
15. $9^{\frac{1}{2} \log_3 2 - 2 \log_{27} 3}$
16. $A = \log_a (a^3 \sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a})$
17. $B = \log_{\frac{1}{a}} \frac{a^5 \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a}}$
18. $C = \log_3 (a^3 \sqrt{a^2} \cdot \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt{a})$
19. $A = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \dots \log_5 14 \cdot \log_{16} 15$.
20. Bi $t \log_{12} 27 = x$. Tính $\log_6 16$.
21. Bi $t \lg 3 = a, \lg 2 = b$. Tính $\log_{125} 30$.
22. Bi $t \log_2 5 = a, \log_2 3 = b$. Tính $\log_3 135$.
23. Bi $t \log_a b = \sqrt{3}$. Tính $A = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$
24. Bi $t \log_a b = \sqrt{5}$. Tính $A = \log_{\sqrt{ab}} \frac{b}{\sqrt{a}}$
25. Bi $t \log_a b = \sqrt{13}$. Tính $A = \log_{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{ab^2}$
26. Bi $t \log_a b = \sqrt{7}$. Tính $A = \log_{a\sqrt{b}} \frac{a}{\sqrt{b^3}}$
27. Bi $t \log_{27} 5 = a, \log_8 7 = b, \log_2 3 = c$ Tính $\log_6 35$
28. Bi $t \log_3 15 = a$. Tính $\log_{25} 15$
29. $\log_{49} 11 = a, \log_2 7 = b$. Tính $A = \log_{\sqrt[3]{7}} \frac{121}{8}$
29. Tính $A = \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \dots + \frac{1}{\log_{2000} x}$, với $x = 2000!$
30. Tính:
 $A = \lg(\tan 1^\circ) + \lg(\tan 2^\circ) + \lg(\tan 3^\circ) + \dots + \lg(\tan 89^\circ)$; $B = \lg(\tan 1^\circ) \cdot \lg(\tan 2^\circ) \cdot \lg(\tan 3^\circ) \dots \lg(\tan 89^\circ)$
 $C = \lg(\cot 1^\circ) + \lg(\cot 2^\circ) + \lg(\cot 3^\circ) + \dots + \lg(\cot 89^\circ)$; $D = \lg(\cot 1^\circ) \cdot \lg(\cot 2^\circ) \cdot \lg(\cot 3^\circ) \dots \lg(\cot 89^\circ)$
 $E = \lg(\sin 1^\circ) \cdot \lg(\sin 2^\circ) \cdot \lg(\sin 3^\circ) \dots \lg(\sin 90^\circ)$
31. Rút gọn biểu thức

$$A = (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \cdot \log_b a - 1. \quad B = \log_2 2x^2 + x^{\log_2(\log_2 x+1)} \cdot \log_2 x + \frac{1}{2} \log_4^2 x^4$$

$$C = \sqrt{\log_n p + \log_p n + 2} \cdot \left(\log_n p - \frac{\log_n p}{\log_n p + 1} \right) \cdot \sqrt{\log_n p} \quad D = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^n} x}$$

Một số công thức – bất công thức mũ và lôgarit

1. So sánh:

a. $\sqrt{3}$ và $\sqrt[3]{5}$ b. $\log_2 3$ và $\log_3 2$ c. $\log_2 3$ và $\log_3 11$ d. $\log_2 a$ và $\log_3 a$

e. $\log_2 3$ và $\log_3 5$ f. $\log_{135} 675$ và $\log_{45} 75$ g. $2^{\frac{2\log_2 5 + \log_1 9}{2}}$ và $\sqrt{8}$

h. $4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{11}}$ và $\sqrt{18}$ i. $9^{\log_3 \sqrt{2} + \log_1 \frac{8}{9}}$ và $\sqrt{5}$ j. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2} \log_{\sqrt{6}} 5}$ và $\sqrt[3]{18}$

2. So sánh các giá trị của $\log_a x$ và $\log_b x$ trong mỗi trường hợp sau:

a. $1 < a < b$; b. $0 < a < b < 1$; c. $0 < a < 1 < b$.

3. Chứng minh rằng nếu $x > 0, y > 0$ và $x^2 + 4y^2 = 12xy$ thì: $\log(x+2y) - 2\lg 2 = \frac{1}{2}(\lg x + \lg y)$.

4. Biết $4^x + 4^{-x} = 23$. Hãy tính $2^x + 2^{-x}$.

5. Chứng minh rằng nếu $x > 0$ thì: $(9^x - 4 \cdot 3^x + 1)x + (x^2 + 1) \cdot 3^x > 0$ (1).

HD: (1) $\Leftrightarrow \frac{9^x - 4 \cdot 3^x + 1}{3^x} + \frac{x^2 + 1}{x} > 0 \Leftrightarrow \left(3^x + \frac{1}{3^x}\right) - 4 + \left(x + \frac{1}{x}\right) > 0$

6. Cho $a = 10^{\frac{1}{1-\lg b}}$; $b = 10^{\frac{1}{1-\lg c}}$. CMR: $c = 10^{\frac{1}{1-\lg a}}$

7. Cho $a, b > 0; x > y > 0$. CMR: $(a^x + b^x)^y < (a^y + b^y)^x$ (Nguyễn 97)

8. Không dùng bảng số hay máy tính. CMR: $2 < \log_3 3 + \log_3 2 < \frac{5}{2}$

9. Cho $a, b > 0$, và $a^2 + b^2 = 7ab$. CMR: $\log_7 \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_7 a + \log_7 b)$

10. Chứng minh rằng với mọi số $a \geq 1$ và $b \geq 1$, ta có bất công thức: $\frac{1}{2}(\sqrt{\ln a} + \sqrt{\ln b}) \leq \sqrt{\ln \frac{a+b}{2}}$.

11. Cho $a, b, c > 0$, trong đó $c \neq 1$. Chứng minh rằng: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Tập các công thức hàm số chứa lôga.

1. $y = \sqrt{\log_2(3x+4)}$ (QGHN 98)

2. $y = \sqrt{16-x^2} \log_2(x^2-5x+6)$

3. $y = \sqrt{x^2-25} + \lg(42+x-x^2)$

4. $y = \sqrt{x^2+x-2} \cdot \log_3(9-x^2)$

5. $y = \sqrt{12-x-x^2} \cdot \lg(x^2-4)$

6. $y = \sqrt{\log_2(7-2x-x^2)}$

7. $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x-3)-1}$

8. $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+5}}$

9. $\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}(\log_5 \frac{x^2+1}{x+3})}$

10. $y = \log_2 \sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$

11. $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{x+5}} - \log_2 \sqrt{x^2-x-6}$

12. $y = \log_3 \frac{x^2+4x+3}{x-2}$

13. $y = \lg(-x^2+3x+4) + \frac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}$

14. $\sqrt{\log_3(\sqrt{x^2-3x+2}+4-x)}$ (C SPHN 97)

15. $y = \sqrt{\log_2\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x}\right)}$ (H An
Ninh 97)

16. $y = 2^{\sqrt{|x-3|-|8x-3|}} + \sqrt{\frac{-\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{x^2-2x8}}}$ (H YHN 97)

17. Vẽ các giá trị n của m thì hàm số sau đây xác định với mọi x thuộc \mathbb{R} :

a. $y = \sqrt{\cos 2x + m \cos x + 4}$

b. $y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}}$

18. $y = \sqrt{\log_3\left(\frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x}\right)}$

19. Cho hàm số : $y = \frac{\sqrt{mx - m + 1}}{\lg[(m-1)x - m + 3]}$

a. Tìm tập xác định của hàm số khi $m = 3$.

b. Tìm các giá trị của m sao cho hàm số xác định với mọi $x \geq 1$.

Tìm nh ng giá trị $a > 0$ để bất phương trình $\forall x \in \mathbb{K} \quad 0 < x \leq 2: \frac{\lg(2x + a - 1)}{\lg(a^2 + a) - \lg x} < 1$

Cho phương trình: $\log_2(mx^3 - 5mx^2 + \sqrt{6-x}) = \log_{2+m}(3 - \sqrt{x-1})$

a. Giải pt khi $m=0$

b. Tìm các giá trị của x để pt có nghiệm đúng với mọi $m \geq 0$

(Đ-ợc 98) Xác định các giá trị của m để phương trình: $\frac{\lg(mx)}{\lg(x+1)} = 2$ có nghiệm duy nhất

Tìm tất cả các nghiệm của phương trình: $\log_{(x+e-1)} \frac{4}{x+1} = \ln 2$