BAN BIÊN TẬP DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC MATH.VN

LỜI GIẢI
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
NĂM HỌC 2010 – 2011

THÁNG 01 – 2011

BÀI SỐ 1: BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. *Cho x là số thực dương và n là số nguyên dương. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải 1. Ta sử dụng phương pháp quy nạp theo n. Với $n=1$, bất đẳng thức của ta trở thành

$$\frac{x(x^2+1)}{x+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^3.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x(x^2+1) = \frac{1}{2}\cdot(2x)\cdot(x^2+1) \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{(2x)+(x^2+1)}{2}\right]^2 = \frac{(x+1)^4}{8}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{x(x^2+1)}{x+1} \leqslant \frac{\frac{(x+1)^4}{8}}{x+1} = \left(\frac{x+1}{2}\right)^3.$$

Và như vậy, bất đẳng thức đã cho đúng với $n=1$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng nếu bất đẳng thức đúng cho $n=k$ ($k\in\mathbb{N}^*$) thì nó cũng sẽ đúng với $n=k+1$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1} \geqslant \frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1},$$

suy ra

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2(k+1)+1} = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1} \geqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\cdot\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta thấy rằng việc chứng minh có thể được đưa về chứng minh kết quả sau

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\cdot\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1} \geqslant \frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{(x+1)^2}{4x} \geqslant \frac{(x^{k+2}+1)(x^k+1)}{(x^{k+1}+1)^2},$$

hay là
$$\frac{(x+1)^2}{4x}-1 \geqslant \frac{(x^{k+2}+1)(x^k+1)}{(x^{k+1}+1)^2}-1.$$
Do $(x+1)^2-4x=(x-1)^2$ và $(x^{k+2}+1)(x^k+1)-(x^{k+1}+1)^2=x^k(x-1)^2$ nên ta có thể thu gọn bất đẳng thức lại thành
$$\frac{(x-1)^2}{4x} \geqslant \frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1}+1)^2},$$
tương đương
$$(x-1)^2\left[(x^{k+1}+1)^2-4x^{k+1}\right] \geqslant 0.$$
Bất đẳng thức này đúng vì theo AM-GM, ta có $(x^{k+1}+1)^2 \geqslant 4x^{k+1}$.

Như vậy, ta đã chứng minh được nếu khẳng định bài toán đúng cho $n=k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ thì nó cũng đúng cho $n=k+1$. Từ đây, kết hợp với việc đã xác lập được tính đúng đắn của bất đẳng thức cần chứng minh cho $n=1$, ta suy ra nó đúng với mọi số nguyên dương n (theo nguyên lý quy nạp). Ngoài ra, có thể thấy được trong suốt quá trình chứng minh, dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại một điểm duy nhất $x=1$. □

Lời giải 2. Ta sẽ chứng minh kết quả tổng quát hơn: *Với mọi* a, $b>0$, *thì*
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n+1} \geqslant \frac{a^nb^n(a^{n+1}+b^{n+1})}{a^n+b^n}. \tag{1}$$
Kết quả bài toán đã cho là trường hợp riêng khi $a=x$ và $b=1$.

Dễ thấy (1) là một bất đẳng thức thuần nhất cho hai biến a, b, vì vậy không mất tính tổng quát ta có thể chuẩn hóa cho $a+b=2$. Khi đó (1) có thể viết lại dưới dạng $f_n(a,b) \geqslant 0$, trong đó
$$f_n(a,b)=a^n+b^n-a^nb^n(a^{n+1}+b^{n+1}).$$
Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có
$$\begin{aligned} ab(a^{n-1}+b^{n-1})(a^{n+1}+b^{n+1}) &\leqslant \left[\frac{ab(a^{n-1}+b^{n-1})+(a^{n+1}+b^{n+1})}{2}\right]^2 \\ &= \frac{(a+b)^2(a^n+b^n)^2}{4}=(a^n+b^n)^2, \end{aligned}$$
từ đó suy ra
$$a^{n+1}+b^{n+1} \leqslant \frac{(a^n+b^n)^2}{ab(a^{n-1}+b^{n-1})}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta thu được

$$\begin{aligned} f_n(a,b) &\geqslant a^n+b^n-\frac{a^{n-1}b^{n-1}(a^n+b^n)^2}{a^{n-1}+b^{n-1}} \\ &= \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}\left[a^{n-1}+b^{n-1}-a^{n-1}b^{n-1}(a^n+b^n)\right] \\ &= \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}f_{n-1}(a,b). \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2), thực hiện các đánh giá liên tiếp, ta có

$$f_n(a,b) \geqslant \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}f_{n-1}(a,b) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\geqslant \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}\cdot\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{a^{n-2}+b^{n-2}}f_{n-2}(a,b) \\ &\geqslant \cdots \geqslant \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}\cdot\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{a^{n-2}+b^{n-2}}\cdots\frac{a^2+b^2}{a^1+b^1}f_1(a,b) \\ &= \frac{a^n+b^n}{a+b}f_1(a,b). \end{aligned} \tag{3}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\begin{aligned} f_1(a,b) &= a+b-ab(a^2+b^2) = a+b-\frac{1}{2}\cdot(2ab)\cdot(a^2+b^2) \\ &\geqslant a+b-\frac{1}{2}\left[\frac{(2ab)+(a^2+b^2)}{2}\right]^2 = a+b-\frac{(a+b)^4}{8} = 0. \end{aligned}$$

Do đó, kết hợp với (3), ta suy ra $f_n(a,b)\geqslant 0$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. □

Lời giải 3. Ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. *Cho a, b là hai số thực dương. Khi đó, với mọi $n\geqslant 1$, ta có*

$$(ab)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a^n+b^n)\leqslant 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n^2}. \tag{4}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a+b=2$ và đặt $a=1+x$, $b=1-x$ với $0\leqslant x<1$. Bất đẳng thức (4) có thể viết lại thành

$$\left[(1+x)(1-x)\right]^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[(1+x)^n+(1-x)^n\right]\leqslant 2,$$

hay tương đương

$$g(x)=(1+x)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-x)^{\frac{n(n-1)}{2}}+(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-x)^{\frac{n(n+1)}{2}}\leqslant 2.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\left[(1+x)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-x)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]' = \\
&= \frac{n(n+1)}{2}(1+x)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n-1)}{2}} - \frac{n(n-1)}{2}(1+x)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1} \\
&= \frac{n}{2}(1+x)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}\left[(n+1)(1-x)-(n-1)(1+x)\right] \\
&= n(1+x)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(1-nx)
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
&\left[(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-x)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]' = \\
&= \frac{n(n-1)}{2}(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n+1)}{2}} - \frac{n(n+1)}{2}(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-x)^{\frac{n(n+1)}{2}-1} \\
&= \frac{n}{2}(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\left[(n-1)(1-x)-(n+1)(1+x)\right] \\
&= -n(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}(1+nx),
\end{aligned}$$

do đó

$$\begin{aligned}
g'(x) &= n(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n-1)-1}{2}}\left[(1+x)^n(1-nx)-(1-x)^n(1+nx)\right] \\
&= n(1-x^2)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(1+x)^n(1+nx)\left[\frac{1-nx}{1+nx}-\frac{(1-x)^n}{(1+x)^n}\right].
\end{aligned}$$

Từ đây ta thấy $g'(x)$ có cùng dấu với $h(x)=\frac{1-nx}{1+nx}-\frac{(1-x)^n}{(1+x)^n}$. Tính đạo hàm của $h(x)$, ta được

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{2n(1-x)^{n-1}}{(1+x)^{n+1}} - \frac{2n}{(1+nx)^2} = \frac{2n(1-x^2)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} - \frac{2n}{(1+nx)^2} \\
&\leqslant \frac{2n}{(1+x)^{2n}} - \frac{1}{(1+nx)^2} = 2n\left[\frac{1}{(1+x)^n}-\frac{1}{1+nx}\right]\left[\frac{1}{(1+x)^n}+\frac{1}{1+nx}\right] \leqslant 0
\end{aligned}$$

do theo bất đẳng thức Bernoulli thì $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ (chú ý rằng $n \geqslant 1$).

Như vậy, $h(x)$ là hàm nghịch biến trên $[0,\ 1)$. Suy ra $h(x) \leqslant h(0)=0$, $\forall x \in [0,\ 1)$. Mà $g'(x)$ có cùng dấu với $h(x)$ nên ta cũng có $g'(x) \leqslant 0$ với mọi $x \in [0,\ 1)$. Do vậy $g(x)$ là hàm nghịch biến trên $[0,\ 1)$. Từ lý luận này, ta suy ra $g(x) \leqslant g(0)=2$, $\forall x \in [0,\ 1)$. Bổ đề được chứng minh. ■

Quay trở lài bài toán. Theo (4), ta có

$$(ab)^{\frac{k(k-1)}{2}}(a^k+b^k) \leqslant 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k^2}, \quad \forall a,\ b>0,\ k \geqslant 1, \tag{5}$$

suy ra

$$a+b \geqslant 2(ab)^{\frac{k-1}{2k}} \left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)^{\frac{1}{k^2}}. \tag{6}$$

Trong (6), cho $a = x^n$, $b = 1$ và $k = \frac{n+1}{n} > 1$, ta được

$$x^n+1 \geqslant 2x^{\frac{n}{2(n+1)}} \left(\frac{x^{n+1}+1}{2}\right)^{\frac{n^2}{(n+1)^2}}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \leqslant \frac{x^n(x^{n+1}+1)}{2x^{\frac{n}{2(n+1)}}\left(\frac{x^{n+1}+1}{2}\right)^{\frac{n^2}{(n+1)^2}}} = x^{\frac{n(2n+1)}{2(n+1)}} \left(\frac{x^{n+1}+1}{2}\right)^{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}.$$

Như thế, phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được rằng

$$x^{\frac{n(2n+1)}{2(n+1)}} \left(\frac{x^{n+1}+1}{2}\right)^{\frac{2n+1}{(n+1)^2}} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$x^{\frac{n(n+1)}{2}}(x^{n+1}+1) \leqslant 2\left(\frac{x+1}{2}\right)^{(n+1)^2}.$$

Đây chính là kết quả của bất đẳng thức (5) áp dụng cho $a = x$, $b = 1$ và $k = n+1$. Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Nhận xét. Có thể thấy ý tưởng tự nhiên nhất khi giải bài này chính là sử dụng phép quy nạp. Lời giải 3 tuy dài và phức tạp nhưng nó cũng có ý nghĩa riêng của nó. Thật vậy, qua lời giải này ta có thể thấy được bất đẳng thức đã cho vẫn đúng cho trường hợp n là số thực tùy ý không nhỏ hơn 1. Kết quả này không thể suy ra được từ hai lời giải bằng quy nạp 1 và 2.

BÀI SỐ 2: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Bài 2. *Cho dãy* $\{x_n\}$ *được xác định bởi*

$$x_1 = 1 \text{ và } x_n = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i \text{ với mọi } n \geqslant 2.$$

Chứng minh rằng dãy $y_n = x_{n+1} - x_n$ *có giới hạn hữu hạn khi* $n \to +\infty$.

Lời giải 1. Từ giả thiết, ta suy ra với mọi $n \geqslant 1$, thì

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{(n-1)^2}{2n} x_n.$$

Do đó

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{n^2} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2(n+1)}{n^2} \left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) \\ &= \frac{2(n+1)}{n^2} \left[x_n + \frac{(n-1)^2}{2n} x_n \right] = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3} x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Sử công thức truy hồi vừa tìm được này kết hợp với phép quy nạp, ta sẽ chứng minh

$$x_n \leqslant 4(n-1), \quad \forall n \geqslant 2. \tag{2}$$

Do $x_2 = \frac{2 \cdot 2}{(2-1)^2} x_1 = 4$ nên dễ thấy (2) đúng với $n = 2$. Giả sử (2) đúng với $n = k \geqslant 2$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{(k+1)(k^2+1)}{k^3} x_k \leqslant \frac{(k+1)(k^2+1)}{k^3} \cdot 4(k-1) \\ &= \frac{4(k^2-1)(k^2+1)}{k^3} = \frac{4(k^4-1)}{k^3} = 4k - \frac{4}{k^3} < 4k, \end{aligned}$$

suy ra (2) cũng đúng với $n = k+1$. Từ đây, áp dụng nguyên lý quy nạp, ta có (2) đúng với mọi $n \geqslant 2$.

Bây giờ, ta sẽ đi chứng minh bài toán đã cho, cụ thể ta sẽ chỉ ra rằng y_n là dãy tăng và bị chặn trên.

- *Chứng minh* y_n *tăng*. Theo (1), ta có

$$y_n = x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3} x_n - x_n = \frac{n^2+n+1}{n^3} x_n.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
y_{n+1}-y_n &= \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{(n+1)^3}x_{n+1}-\frac{n^2+n+1}{n^3}x_n \\
&= \frac{n^2+3n+3}{(n+1)^3}\cdot\frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n-\frac{n^2+n+1}{n^3}x_n \\
&= \frac{x_n}{n^3}\left[\frac{(n^2+3n+3)(n^2+1)}{(n+1)^2}-(n^2+n+1)\right] \\
&= \frac{x_n}{n^3}\left\{\left[1+\frac{n+2}{(n+1)^2}\right](n^2+1)-(n^2+n+1)\right\} \\
&= \frac{x_n}{n^3}\left[\frac{(n+2)(n^2+1)}{(n+1)^2}-n\right]=\frac{2x_n}{n^3(n+1)^2}>0.
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ y_n là dãy tăng.

- *Chứng minh y_n bị chặn trên.* Sử dụng (2), với mọi $n \geqslant 2$, ta có

$$y_n=\frac{n^2+n+1}{n^3}x_n \leqslant \frac{n^2+n+1}{n^3}\cdot 4(n-1)=\frac{4(n^3-1)}{n^3}<4.$$

Do đó $y_1<y_2<\cdots<y_n<4$, hay nói cách khác, dãy y_n bị chặn trên bởi 4.

Từ hai kết quả vừa chứng minh trên, ta dễ dàng suy ra kết quả cần chứng minh. □

Nhận xét. Khi làm bài toán này, có lẽ các bạn học sinh đều không khó để tìm ra các tính chất

- $x_{n+1}=\frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n$.
- $y_n=\frac{n^2+n+1}{n^3}x_n$.
- y_n là dãy tăng.

Và khi đó, công việc còn lại sẽ chỉ là tìm ra một chặn trên cho y_n. Có thể nói đây chính là yếu tố quan trọng nhất của bài toán. Việc tìm ra đánh giá (2) có thể được giải thích như sau: Ta biết rằng hàm phân thức $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ với $g(x)$, $h(x)$ là các đa thức đồng bậc và $h(x)>0$ thì bị chặn trên bởi một hằng số. Mà quan sát công thức truy hồi của y_n, ta thấy rằng $\frac{n^2+n+1}{n^3}$ là hàm phân thức theo n với n^2+n+1 là đa thức bậc 2 và n^3 là đa thức bậc 3. Từ đây ta chợt có một ý tưởng là đánh giá x_n với hàm đa thức bậc nhất theo n (chiều $\leqslant$) vì khi đó y_n sẽ bị chặn trên bởi một hàm phân thức với tử là đa thức bậc 3 và mẫu cũng là đa thức bậc 3, và như thế theo tính chất vừa nhắc lại ở trên, ta biết chắc rằng y_n sẽ bị chặn trên bởi một hằng số.

Với ý tưởng như vậy, ta mong muốn có một đánh giá dạng $x_n \leqslant an+b$. Ngoài ra, từ công thức truy hồi trên của x_n, ta cũng nghĩ đến việc thiết lập đánh giá này bằng quy nạp (vì như thế là đơn giản hơn cả). Như thế, ta cần phải chọn các số thực a, b sao cho

$$\frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}(an+b) \leqslant a(n+1)+b.$$

Thực hiện phép khai triển, ta viết được bất đẳng thức này lại thành

$$-(a+b)n(n+1)-b \geqslant 0.$$

Để điều này đúng với mọi $n \geqslant 1$, ta cần có $a+b \leqslant 0$ và $2(a+b)+b \leqslant 0$. Và tất nhiên, để đơn giản, ta chọn ngay $a+b=0$ và $b<0$, tức $a=-b>0$. Khi đó, ta thu được bất đẳng thức dạng

$$x_n \leqslant a(n-1).$$

Ta thấy rằng nếu có a sao cho đánh giá này đúng với một số n_0 nào đó thì đánh giá cũng sẽ đúng với mọi $n \geqslant n_0$ (do lý luận trên). Và như thế, ta chỉ cần xét một vài giá trị n nhỏ và chọn a sao cho bất đẳng thức đúng với các giá trị đó là được. Ngoài ra, ta thấy bất đẳng thức sẽ không được thỏa mãn với $n=1$, nên ta sẽ xét với $n=2$. Khi đó, bất đẳng thức trở thành $4 \leqslant a$. Và rất đơn giản, ta nghĩ ngay đến việc chọn $a=4$. Đây chính là nguồn gốc của việc thiết lập (2).

Lời giải 2. Áp dụng giả thiết đã cho ở đề bài, ta có

$$\frac{n^2x_{n+1}}{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k = x_n + \frac{(n-1)^2x_n}{2n} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n. \tag{3}$$

Từ đó suy ra

$$x_{n+1}-x_n = \frac{n^2+n+1}{n^2}u_n \text{ với } u_n = \frac{x_n}{n}. \tag{4}$$

Do (3) nên ta có

$$u_{n+1} = \frac{n^2+1}{n^2}u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)u_n.$$

Mặt khác, dễ thấy $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên ta cũng có $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vì vậy, ta có thể đặt $\ln u_n = v_n$. Khi đó

$$v_{n+1} = v_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) > v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là dãy tăng. Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức cơ bản $\ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$, ta thu được

$$v_{n+1} < v_n + \frac{1}{n^2}.$$

Từ đây ta có

$$v_n < v_1 + 1 + \sum_{k=2}^{(n-1)^2} \frac{1}{k^2} < v_1 + 1 + \sum_{k=2}^{(n-1)^2} \frac{1}{k(k-1)} = v_1 + 2 - \frac{1}{n-1}, \quad \forall n \geqslant 2.$$

Điều này chứng tỏ $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ bị chặn, hơn nữa do $\{v_n\}$ là dãy tăng nên ta suy ra được $\{v_n\}$ hội tụ. Vì $u_n = e^{v_n}$ và hàm $f(x) = e^x$ là hàm liên tục nên $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ cũng hội tụ. Từ lý luận này kết hợp với $\lim \frac{n^2+n+1}{n^2} = 1$ và (4), ta suy ra điều phải chứng minh. □

BÀI SỐ 3: HÌNH HỌC PHẲNG

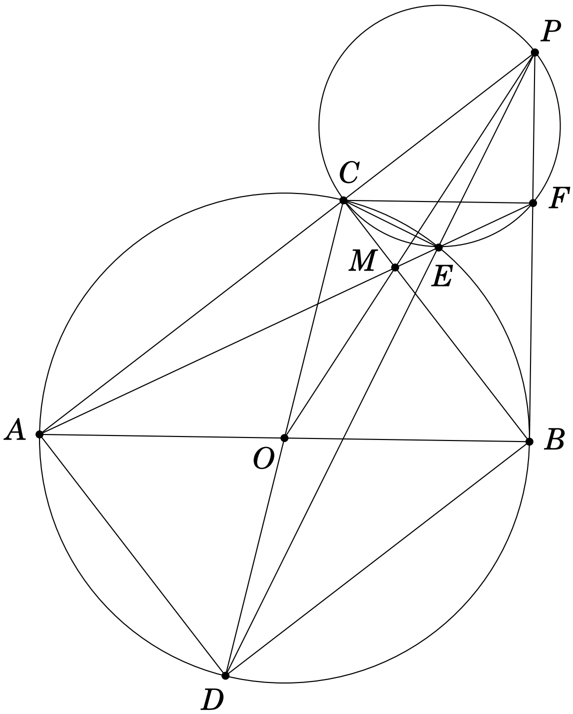
Bài 3. *Cho đường tròn (O), đường kính AB. P là một điểm trên tiếp tuyến của (O) tại B $(P \not\equiv B)$. Đường thẳng AP cắt (O) lần thứ hai tại C. D là điểm đối xứng của C qua O. Đường thẳng DP cắt (O) lần thứ hai tại E.*

(a) *Chứng minh rằng AE, BC, PO đồng quy tại M.*

(b) *Tìm vị trí của điểm P để diện tích tam giác AMB là lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo R là bán kính của (O).*

Lời giải. Trước hết xin nhắc lại không chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. Giả sử AC cắt BD tại O và AD cắt BC tại I. Khi đó, OI đi qua trung điểm AB và CD.*



Quay trở lại bài toán:

(a) Gọi F là giao điểm của AE và BP. Từ tính chất góc nội tiếp và đường cao của tam giác vuông ta dễ thấy $\angle AEC = \angle ABC = \angle BPC$, vậy tứ giác $CPFE$ nội tiếp. Từ đó suy ra

$$\angle CPE = \angle CFE, \quad \angle PCE = \angle EFB.$$

Cộng các đẳng thức góc với chú ý $\angle CEP = 90^\circ$, ta suy ra

$$90^\circ = \angle CPE + \angle PCE = \angle CFE + \angle EFB = \angle CFB,$$

hay $CF \perp PB$, và do đó $CF \parallel AB$.

Gọi M là giao điểm của CB và AE. Áp dụng bổ đề cho hình thang $ABFC$, ta có MP đi qua trung điểm AB hay MP đi qua O. Vậy AE, BC, OP đồng quy tại M, đó là điều phải chứng minh.

(b) Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác APO với C, M, B thẳng hàng, ta dễ thấy

$$\frac{OM}{OP} = \frac{CA}{CA + 2CP}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{S_{MAB}}{S_{PAB}} = \frac{OM}{OP} = \frac{CA}{CA + 2CP}.$$

Suy ra

$$S_{MAB} = S_{PAB} \cdot \frac{CA}{CA + 2CP} \leqslant S_{PAB} \cdot \frac{CA}{2\sqrt{CA \cdot 2CP}} = S_{PAB} \cdot \frac{CA}{2\sqrt{2}BC}$$
$$= \frac{BC \cdot PA}{2} \cdot \frac{CA}{2\sqrt{2}BC} = \frac{4R^2}{4\sqrt{2}} = \frac{R^2}{\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy khi $PB = \sqrt{2}R$. $\square$

BÀI SỐ 4: TOÁN RỜI RẠC

Bài 4. *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có các cạnh và hai đường chéo AC, AD có độ dài không vượt quá $\sqrt{3}$. Trong ngũ giác lồi lấy 2011 điểm phân biệt bất kì. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn đơn vị có tâm nằm trên cạnh của ngũ giác lồi $ABCDE$ và chứa ít nhất 403 điểm trong số 2011 điểm đã cho.*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. *Cho điểm I nằm trong tam giác XYZ có độ dài các cạnh nhỏ hơn $\sqrt{3}$. Khi đó,*

$$\min\{IX, IY, IZ\} < 1.$$

Chứng minh. Thật vậy, vì $\angle XIY + \angle YIZ + \angle ZIX = 360°$ nên trong ba góc $\angle XIY$, $\angle YIZ$, $\angle ZIX$ phải có một góc không nhỏ hơn $120°$. Giả sử $\angle XIY \geqslant 120°$ thì trong tam giác $\triangle IXY$, theo định lý cosin ta có

$$\begin{aligned}3 \geqslant XY^2 &= IX^2 + IY^2 - 2IX \cdot IY \cos\angle XIY \\ &\geqslant IX^2 + IY^2 + IX \cdot IY \geqslant 3\min\{IX^2, IY^2\}.\end{aligned}$$

Từ đây đưa đến $\min\{IX, IY\} \leqslant 1$. Bổ đề được chứng minh. ■

Quay trở lại bài toán. Theo giả thiết thì các tam giác $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$ đều có cả ba cạnh nhỏ hơn $\sqrt{3}$, mà mỗi điểm trong 2011 điểm gieo trong ngũ giác $ABCDE$ đều thuộc miền trong của một trong ba tam giác này nên theo bổ đề, mỗi điểm phải cách một đỉnh nào đó của ngũ giác một khoảng không lớn hơn 1. Theo nguyên lý Dirichlet, có một đỉnh của ngũ giác có khoảng cách không lớn hơn 1 đến ít nhất $\left\lceil \frac{2011}{5} \right\rceil = 403$ điểm. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

BÀI SỐ 5: DÃY SỐ CÓ TÍNH CHẤT SỐ HỌC

Bài 5. *Cho dãy số nguyên* $\{a_n\}$ *xác định bởi*

$$a_0 = 1,\ a_1 = -1 \text{ và } a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2} \text{ với mọi } n \geqslant 2.$$

Chứng minh rằng $a_{2012} - 2010$ *chia hết cho* 2011.

Lời giải 1. Xét dãy $\{b_n\}$ được xác định như sau

$$b_0 = 1,\ b_1 = -1 \text{ và } b_n = 6b_{n-1} + 2016b_{n-2} \text{ với mọi } n \geqslant 2.$$

Dãy này có phương trình đặc trưng

$$x^2 - 6x - 2016 = 0$$

có hai nghiệm là $x = -42$ và $x = 48$. Từ đây, sử dụng kiến thức về phương trình sai phân, ta tìm được công thức tổng quát của dãy là

$$b_n = \frac{41 \cdot 48^n + 49 \cdot (-42)^n}{90}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ngoài ra, ta cũng dễ dàng chứng minh bằng quy nạp rằng

$$a_n \equiv b_n \pmod{2011}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Theo đó, ta chỉ cần chứng minh $b_{2012} + 1 \equiv 0 \pmod{2011}$ nữa là xong. Ta có

$$b_{2012} + 1 = \frac{41 \cdot 48^{2012} + 49 \cdot (-42)^{2012} + 90}{90}.$$

Do 2011 là số nguyên tố, và 2011, 90 là hai số nguyên tố cùng nhau nên ta chỉ cần chứng minh

$$41 \cdot 48^{2012} + 49 \cdot (-42)^{2012} + 90 \equiv 0 \pmod{2011}. \tag{1}$$

Mà theo định lý Fermat nhỏ, ta có

$$\begin{aligned} 41 \cdot 48^{2012} + 49 \cdot (-42)^{2012} + 90 &\equiv 41 \cdot 48^2 + 49 \cdot 42^2 + 90 \pmod{2011} \\ &= 90b_2 + 90 = 90\left[6 \cdot (-1) + 2016 \cdot 1\right] + 90 \\ &= 90 \cdot 2010 + 90 = 90 \cdot 2011 \equiv 0 \pmod{2011}. \end{aligned}$$

Vì vậy, (1) đúng. Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Lời giải 2. Phương trình đặc trưng của dãy đã cho là $x^2-6x-5=0$ có hai nghiệm là $3-\sqrt{14}$ và $3+\sqrt{14}$, do đó ta dễ dàng tìm được công thức số hạng tổng quát của dãy là

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(7-2\sqrt{14}\right)\left(3+\sqrt{14}\right)^n+\left(7+2\sqrt{14}\right)\left(3-\sqrt{14}\right)^n}{14} \\ &= \frac{\left(-7+\sqrt{14}\right)\left(3+\sqrt{14}\right)^{n-1}-\left(7+\sqrt{14}\right)\left(3-\sqrt{14}\right)^{n-1}}{14} \\ &= -u_n+2v_n, \end{aligned}$$

trong đó

$$u_n=\frac{\left(3+\sqrt{14}\right)^{n-1}+\left(3-\sqrt{14}\right)^{n-1}}{2}, \quad v_n=\frac{\left(3+\sqrt{14}\right)^{n-1}-\left(3-\sqrt{14}\right)^{n-1}}{2\sqrt{14}}.$$

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton, ta có

$$u_{2012}=\sum_{k=0}^{1005} C_{2011}^{2k}3^{2011-2k}14^k=3^{2011}+\sum_{k=1}^{1005} C_{2011}^{2k}3^{2011-2k}14^k.$$

Do $1<2k<2011$ với $1\leqslant k\leqslant 1005$ và 2011 là số nguyên tố nên

$$C_{2011}^{2k}=2011\left(\frac{C_{2010}^{2k-1}}{2k}\right)\vdots\, 2011.$$

Mặt khác, theo định lý Fermat nhỏ thì

$$3^{2011}\equiv 3 \pmod{2011}.$$

Do vậy, kết hợp các lập luận lại với nhau, ta được

$$u_{2012}\equiv 3 \pmod{2011}. \tag{2}$$

Tương tự với v_n, ta cũng sử dụng khai triển Newton và thu được

$$v_{2012}=\sum_{k=1}^{1006} C_{2011}^{2k-1}3^{2012-2k}14^{k-1}=14^{1005}+\sum_{k=1}^{1005} C_{2011}^{2k-1}3^{2012-2k}14^{k-1}.$$

Đến đây, cũng bằng cách sử dụng tính nguyên tố của 2011, ta thấy

$$C_{2011}^{2k-1}=2011\left(\frac{C_{2010}^{2k-2}}{2k-1}\right)\vdots\, 2011$$

với $k \in \{1, 2, \ldots, 1005\}$. Vì vậy

$$v_{2012} \equiv 14^{1005} \pmod{2011}.$$

Do $14 = 2025 - 2011 = 45^2 - 2011 \equiv 45^2 \pmod{2011}$ nên áp dụng định lý Fermat nhỏ, ta có

$$14^{1005} \equiv 45^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}.$$

Suy ra

$$v_{2012} \equiv 1 \pmod{2011}. \tag{3}$$

Từ (2) và (3), ta có

$$a_{2012} - 2010 \equiv -3 + 2 \cdot 1 - 2010 \equiv 0 \pmod{2011}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

BÀI SỐ 6: HÌNH HỌC PHẲNG

Bài 6. *Cho tam giác ABC không cân tại A và có các góc ABC, ACB là các góc nhọn. Xét một điểm D di động trên cạnh BC sao cho D không trùng với B, C và hình chiếu vuông góc của A trên BC. Đường thẳng d vuông góc với BC tại Dcắt đường thẳng AB, AC tương ứng tại E và F. Gọi M, N và P lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AEF, BDE và CDF. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi đường thẳng d đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

Lời giải. Ta thấy bài toán đã cho chính là sự kết hợp cơ học của hai kết quả sau

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC không cân tại A và có các góc ABC, ACB là các góc nhọn. Xét một điểm D di động trên cạnh BC sao cho D không trùng với B, C và hình chiếu vuông góc của A trên BC. Đường thẳng d vuông góc với BC tại D cắt đường thẳng AB, AC tương ứng tại E, F. (N), (P) lần lượt là đường tròn nội tiếp tam giác BDE, CDF. Khi đó, d đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi tiếp tuyến chung khác d của (N) và (P) đi qua A.*

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC không cân tại A và có các góc ABC, ACB là các góc nhọn. Xét điểm D di động trên cạnh BC sao cho D không trùng với B, C và hình chiếu vuông góc của A trên BC. Đường thẳng d vuông góc với BC tại D cắt đường thẳng AB, AC tương ứng tại E, F. Gọi M, N và P lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AEF, BDE và CDF. Khi đó, bốn điểm A, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi tiếp tuyến chung khác d của (N) và (P) đi qua A.*

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh được hai bổ đề này thì bài toán cũng được giải quyết xong.

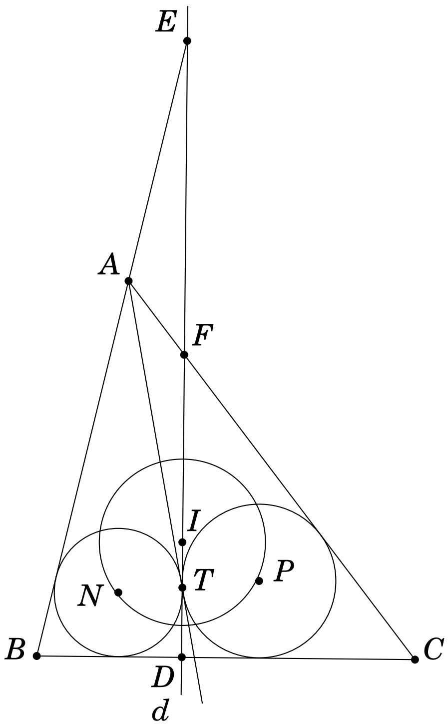
Chứng minh bổ đề 1. Ta chứng minh hai chiều.

- Giả sử tiếp tuyến khác d của (N) và (P) đi qua A. Gọi giao điểm của tiếp tuyến đó và d là T. Dễ thấy các tứ giác $TABD$ và $TACD$ ngoại tiếp, do đó theo tính chất cơ bản của tứ giác ngoại tiếp, ta có
$$AB + TD = AT + BD \text{ và } AC + TD = AT + DC.$$
Từ hai đẳng thức này, ta dễ thấy
$$DB - DC = AB - AC.$$

Lại có $DB + DC = BC$ nên

$$DB = \frac{BA + BC - AC}{2}, \quad DC = \frac{CA + CB - AB}{2}.$$

Vậy D chính là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với BC, hay d đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.



- Giả sử d đi qua tâm nội tiếp của tam giác ABC, khi đó ta có ngay đẳng thức

$$DB - DC = \frac{BA + BC - AC}{2} - \frac{CA + CB - AB}{2} = AB - AC.$$

Gọi giao điểm của tiếp tuyến qua A (khác AB) của (N) và d là T. Tứ giác $TABD$ ngoại tiếp nên ta có

$$AB + TD = AT + BD.$$

Kết hợp đẳng thức trên, ta suy ra

$$AC + TD = AT + DC.$$

Điều này chứng tỏ tứ giác $TADC$ ngoại tiếp. Vậy AT tiếp xúc (P), hay nói cách khác, AT là tiếp tuyến chung khác d của (N) và (P) đi qua A. ∎

Chứng minh bổ đề 2. Ta chứng minh hai chiều.

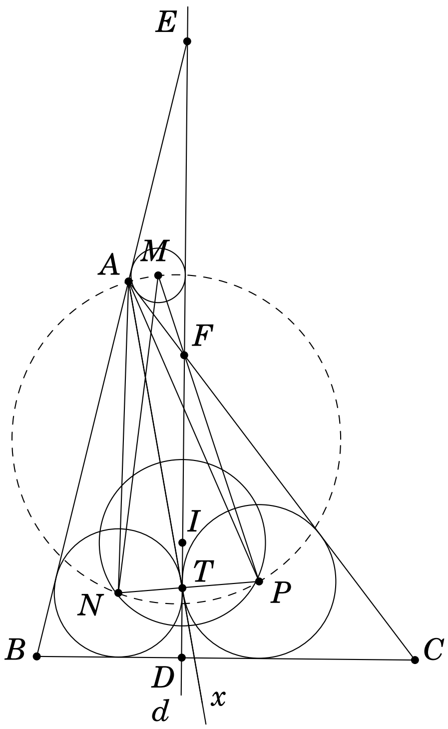
- Giả sử tiếp tuyến chung của (N) và (P) đi qua A, ta phải chứng minh bốn điểm A, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn. Để ý rằng E, M, N thẳng hàng và F, M, P thẳng hàng, do vậy

$$\angle NMP = 180^\circ - \angle EMF = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\angle EAF}{2}\right)$$
$$= 90^\circ - \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = \frac{\angle BAC}{2}.$$

Mặt khác, vì tiếp tuyến chung khác d của (N) và (P) cũng đi qua A nên

$$\angle NAP = \frac{\angle BAC}{2}.$$

Kết hợp hai đẳng thức trên, ta suy ra tứ giác $AMNP$ nội tiếp.



- Giả sử A, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn, ta phải chứng minh tiếp tuyến chung khác d của (N) và (P) đi qua A. Cũng từ lập luận trên, ta có

$$\angle NMP = \frac{\angle BAC}{2}.$$

Do A, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn nên

$$\angle NAP = \angle NMP.$$

Kết hợp với trên, ta suy ra

$$\angle NAP = \frac{\angle BAC}{2}.$$

Qua A vẽ tiếp tuyến Ax của (N), ta có

$$\angle NAx = \frac{\angle BAx}{2}.$$

Do đó

$$\angle PAx = \angle NAP - \angle NAx = \frac{\angle BAC}{2} - \frac{\angle BAx}{2} = \frac{\angle CAx}{2} = \angle PAC.$$

Từ đây suy ra Ax đối xứng AC qua AP mà AC tiếp xúc (P). Vậy Ax tiếp xúc (P). $\square$

Nhận xét. Phần thuận của bổ đề 1 là bài thi vô địch Nga năm 2009 (phần dành cho lớp 10).

BÀI SỐ 7: ĐA THỨC BẤT KHẢ QUY TRÊN R

Bài 7. *Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng đa thức*

$$P(x, y) = x^n + xy + y^n$$

không thể viết dưới dạng $P(x, y) = G(x, y) \cdot H(x, y)$, trong đó $G(x, y)$ và $H(x, y)$ là các đa thức với hệ số thực, khác đa thức hằng.

Lời giải. Giả sử tồn tại các đa thức $G(x, y)$ và $H(x, y)$ thỏa mãn $\deg G \geqslant 1$, $\deg H \geqslant 1$ sao cho

$$P(x, y) = G(x, y) \cdot H(x, y).$$

Khi đó dễ thấy $\deg H + \deg G = n$. Từ giả thiết ta có $G(x, 0) \cdot H(x, 0) = x^n$, suy ra tồn tại $k \in \mathbb{N}$, $a_1 a_2 = 1$ sao cho

$$H(x, 0) = a_1 x^k, \quad G(x, 0) = a_2 x^{n-k}.$$

Do $H(x, y)$ và $G(x, y)$ là các đa thức nên ta có thể viết được chúng dưới dạng

$$H(x, y) = a_1 x^k + yH_1(x, y), \quad G(x, y) = a_2 x^{n-k} + yG_1(x, y),$$

trong đó $G_1(x, y)$, $H_1(x, y)$ là các đa thức. Thay vào $P(x, y)$ và rút gọn, ta được

$$a_1 x^k y G_1(x, y) + a_2 x^{n-k} y H_1(x, y) + y^2 G_1(x, y) \cdot H_1(x, y) = xy + y^n,$$

hay

$$a_1 x^k G_1(x, y) + a_2 x^{n-k} H_1(x, y) - x = y^{n-1} - yG_1(x, y) \cdot H_1(x, y).$$

Cho $y = 0$, ta có

$$x = a_1 x^k G_1(x, 0) + a_2 x^{n-k} H_1(x, 0).$$

Giả sử k và $n - k$ đều lớn hơn 1. Khi đó ta có hai khả năng xảy ra.

- Cả hai đa thức $G_1(x, 0)$ và $H_1(x, 0)$ đều đồng nhất 0, suy ra x đồng nhất 0 (vô lí).
- Có một trong hai đa thức trên có bậc $\geqslant 1$, giả sử là $G_1(x, 0)$. Khi đó bậc của hạng tử cao nhất của đa thức vế phải là $k + \deg G_1 > 1$.

Do vậy, trong hai số k, $n-k$ phải có một số bé hơn 2. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $k \leqslant 1$.

- Nếu $k=0$ thì $H_1 \equiv 0$. Khi đó $H(x, y) \equiv a_1$ (loại).
- Nếu $k=1$ thì $H_1 \equiv b \neq 0$. Khi đó $H(x, y) = a_1 x + by$ hay

$$x^n + xy + y^n = 0, \quad \forall x = -\frac{by}{a_1}.$$

  Mà điều này cũng không thể kể cả khi $n=2$.

Vậy bài toán được chứng minh. $\square$