BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN
****

HÀ DUY NGHĨA

CÁC TÍNH CHẤT ĐẠI SỐ VÀ TÔ PÔ CỦA TRƯỜNG SỐ PHỨC

CAO HỌC TOÁN KHÓA 11
Chuyên ngành: **Đại số và lý thuyết số**

TIỂU LUẬN GIẢI TÍCH PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

CÁN BỘ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH HÀ HUY KHOÁI

Quy nhơn, Tháng 6 năm 2009

MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU

Số phức có vai trò quan trọng trong toán học, gần như trường số phức thỏa mãn các yêu cầu của toán học, chính vì vậy mà mặc dù gọi là số ảo nhưng trường $\mathbb{C}$ đóng vai trò quan trọng trong đời sống thực của chúng ta, Có rất nhiều cách xây dựng trường số phức $\mathbb{C}$, bài viết này là một trong những cách xây dựng nó, cụ thể được trình bày như sau:

Chương I :Xây dựng trường số phức

Chương II: Cấu trúc topo của mặt phẳng phức.

Trong mỗi chương nội dung được trình bày như sau :

Chương I xây dựng tập $\mathbb{C}$ sau đó chứng minh $\mathbb{C}$ là một trường và mô tả dạng đại số , dạng lượng giác của các phần tử trong $\mathbb{C}$.

Chương II Mô tả cấu trúc tôpô của nó, mô tả dãy, chuỗi hội tụ , hàm số biến số phức liên tục trên $\mathbb{C}$,

Mặc dù bản thân đã rất cố gắng và được sự hướng dẫn nhiệt tình của thầy giáo hướng dẫn, nhưng do năng lực của bản thân và thời gian còn hạn chế nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn GS.TSKH Hà Huy Khoái người đã tận tình giúp đỡ, cùng tập thể lớp cao học toán khoá 11 tạo điều kiện cho tôi hoàn thành tiểu luận này.

. *Tác giả*

Chương 1

XÂY TRƯỜNG SỐ PHỨC

Trong chương này, phần đầu tôi trình bày cách xây dựng trường số phức, cấu trúc đại số, cấu trúc hình học, dạng lượng giác của số phức.

1.1 Định nghĩa số phức

Xét tập $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)\}|x, y \in \mathbb{R}$.

Hai phần tử $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ được gọi là bằng nhau nếu và chỉ nếu

$$(x_1 = x_2, y_1 = y_2)$$

Ta xây dựng phép toán trong $\mathbb{R}^2$ như sau: $\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

Phép cộng :$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Phép nhân :$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2.y_1)$

Định nghĩa 1.1.1. Tập $\mathbb{R}^2$ cùng với hai phép toán cộng và nhân được định nghĩa như trên gọi là tập số phức $\mathbb{C}$, phần tử $(x, y) \in \mathbb{C}$ là một số phức.

Định lý 1.1.2. $(\mathbb{C}, +, .)$ *là một trường*

Chứng minh. Để chứng minh $(\mathbb{C}, +, .)$ là trường ta chứng minh các vấn đề sau.

(i) ***Phép cộng có tính giao hoán*** :$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ ta có $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1$.

(ii) ***Phép cộng có tính kết hợp*** :

$$\forall z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{C} \text{ ta có}$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$
$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = z_1 + (z_2 + z_3).$$

(iii) ***Tồn tại phần tử không*** $0 = (0,0) \in \mathbb{C}$.

Thật vậy ta có:$\forall z = (x,y) \in \mathbb{C}, z+0 = (x,y)+(0,0) = (x+0, y+0) = (x,y) = z$.

(iv) ***Tồn tại phần tử đối*** $\forall z = (x,y), \exists -z = (-x,-y)$ là phần tử đối.

Thật vậy $z + (-z) = (x,y) + (-x,-y) = (x-x, y-y) = (0,0)$.

(v) ***Phép nhân có tính chất giao hoán*** $\forall z_1 = (x_1,y_1), z_2 = (x_2,y_2) \in \mathbb{C}$,

ta có: $z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, (x_1y_2 + x_2.y_1) = (x_2x_1 - y_2.y_1, (x_2y_1 + x_1y_2) = z_2.z_1$.

(vi) ***Phép nhân có tính chất kết hợp***

$\forall z_1 = (x_1,y_1), z_2 = (x_2,y_2), z_3 = (x_3,y_3) \in \mathbb{C}$ ta có:

$$
\begin{aligned}
(z_1z_2)z_3 &= (x_1.x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2.y_1)(x_3,y_3) \\
&= ((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2.)y_3, (x_1.x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + x_2y_1)x_3) \\
&= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3)
\end{aligned}
$$

Tương tự ta cũng có :

$z_1(z_2z_3) = (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3; x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2y_3 - y_1y_2y_3)$

điều này chứng tỏ :$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

(vii) ***Phép nhân phần tử đơn vị*** Tồn tại phần tử đơn vị $1 = (1,0) \in \mathbb{C}$

Thật vậy ta có : $\forall z_1 = (x,y) \in \mathbb{C}, 1.z = (1,0)(x,y) = (1x - 0y, 1y + 0.x) = (x,y)$

$$= (x,y)(1,0) = z.1 = z.$$

$(viii)$ ***Tồn tại phần tử nghịch đảo***, $\forall z_1 = (x,y) \in \mathbb{C}, z \neq 0$, phần tử nghịch đảo của z là $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

(ix) ***Phép nhân phân phối với phép cộng***

$\forall z_1 = (x_1,y_1), z_2 = (x_2,y_2), z_3 = (x_3,y_3) \in \mathbb{C}$ ta có:

$$
\begin{aligned}
z_1(z_2 + z_3) &= (x_1,y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\
&= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3); x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\
&= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\
&= z_1z_2 + z_1z_3
\end{aligned}
$$

Vậy ta đã chứng minh được $(\mathbb{C}, +, .)$thỏa mãn các tiên đề của trường . $\square$

1.2 Dạng đại số của số phức

1.2.1 Xây dựng số i

Xét tương ứng $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\}$, $f(x) = (x, 0)$
Dễ dàng chứng minh được f là ánh xạ và là một song ánh.
Ngoài ra ta cũng có:$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0), (x, 0)(y, 0) = (xy, 0)$, vì f là song ánh nên ta có thể đồng nhất $(x, 0) = x$.
Đặt $i = (0, 1)$, khi đó ta có :$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + yi = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$. Từ đó ta có kết quả sau:

Mệnh đề 1.2.1. *Mỗi số phức tùy ý $z = (x, y)$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng*

$$z = x + yi$$

với x, y là những số thưc tùy ý, và trong đó hệ thức $i^2 = -1$.

Hệ thức $i^2 = -1$ suy trực tiếp từ phép nhân hai số phức

$$i^2 = i.i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Biểu thức $x + yi$ gọi là dạng đại số của số phức $z = (x, y)$., Vì vậy ta có thể viết $\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$và từ bây giờ ta ký hiệu cho số phức $z = (x, y) = x + yi$ và ta có các khái niệm liên quan sau đây:

$x =$Rez gọi là phần thực của số phức z

$y =$Imz gọi là phần ảo của số phức z

i gọi là đơn vị ảo.

Nếu số phức có phần thực $x = 0$ gọi là thuần ảo.

Cho số phức $z = x + iy$, số phức có dạng $x - iy$ được gọi là số phức liên hợp của số phức z, kí hiệu là $\overline{z}$, nghĩa là $z = x + yi$ và $\overline{z} = \overline{x + i\,y} = x - i\,y$

Cho số phức $z = x + iy$ khi đó $\sqrt{x^2 + y^2}$ gọi là modulus (trị tuyệt đối) của số phức z ký hiệu $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Với hai số phức z_1, z_2 tùy ý ta luôn có bất đẳng thức sau gọi là bất đẳng thức tam giác :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Hai số phức z_1, z_2 gọi là bằng nhau nếu $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ và $\mathrm{Im}(z-1)$=$\mathrm{Im}(z_2)$.

Số phức $z \in \mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu $\mathrm{Im}(z) = 0$.

Số phức $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ nếu $\mathrm{Im}(z) \neq 0$.

1.2.2 Các phép toán trên dạng đại số

Tương tự, ta cũng định nghĩa phép toán cộng và nhân như sau

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

(i)***. Phép cộng*** Tổng của hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$, là một số phức z được xác định :

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Kí hiệu $z = z_1 + z_2$.

(ii)***.Phép nhân*** Tích của hai số $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ là một số phức z được xác định bởi:

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Kí hiệu $z = z_1z_2$.

Tương tự định lý (1.1.2) ta có định lý sau đây mạnh hơn.

Định lý 1.2.2. $(\mathbb{C}, +, .)$ *là một trường đóng đại số.*

Định lý này được suy ra trực tiếp từ định lý cơ bản của đại số .

1.3 Biểu diễn hình học của số phức

1.3.1 Biểu diễn hình học của số phức

Điểm $M(x, y)$ trong mặt phẳng Oxy gọi là điểm biểu diễn hình học của số phức $z = x + yi$.

Số phức $z = x + yi$ gọi là tọa độ phức của điểm $M(,y)$, ta dùng ký hiệu M(z) để chỉ tọa độ phức của điểm M là z

Mặt phẳng tọa độ với việc biểu diễn số phức như trên gọi là mặt phẳng phức.

1.3.2 Biểu diễn hình học của Môđun

Cho số phức $z = x + yi$ có biểu diễn hình học là $M(z)$, khi đó khoảng cách từ $M(z)$ đến O là Môđun của số phức z

Chú ý: $i)$ Với số thực dương r tập hợp các số phức với Môđun r biểu diễn trên mặt phẳng phức là đường tròn $\mathfrak{C}(O, r)$

(ii) Các số phức $\{z, |z| < r\}$ là các điểm nằm trong đường tròn $\mathfrak{C}(O, r)$.

(iii) Các số phức $\{z, |z| > r\}$ là các điểm nằm ngoài đường tròn $\mathfrak{C}(O, r)$.

1.3.3 Biểu diễn hình học của các phép toán

$i)$ ***Phép toán cộng và trừ*** Xét hai số phức $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ và các véc tơ tương ứng $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, khi đó :

Tổng hai số phức : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)i$

Tổng hai véctơ :$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$ Qua biểu diễn ta thấy tổng hai số phức$z_1 + z_2$ tương ứng với tổng hai véc tơ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Hiệu hai số phức :$z_1 - z_2 = (x_1 + x_2)i - (y_1 + y_2)i$

Hiệu hai véctơ :$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}$

Chú ý : Khoảng cách hai điểm $M_1(x - 1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ bằng mô đun của số phức $z_1 - z_2$ bằng độ dài của $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

$$M_1M_2 = |z_1 - z_2| = |v_1 - v_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$ii)$ ***Tích của số phức với số thực***

Xét số phức $z = x + yi$ và véc tơ tương ứng $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Nếu λ là số thực thì tích $\lambda.z = \lambda x + \lambda yi$ tương ứng với véctơ $\lambda\vec{v} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}$.

1.4 Dạng lượng giác của số phức

1.4.1 Tọa độ cực của số phức

Trong mặt phẳng Oxy cho (x, y) khác gốc tọa độ.

Số thực $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gọi là bán kính cực của điểm M, số đo $\theta \in [0, 2\pi)$ của góc lượng giác $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$ gọi là argument của M, cặp có thứ tự (r, θ) gọi là tọa độ cực của điểm M, viết $M(r, \theta)$.

Chý ý : Ánh xạ $h : R \times R \backslash (0,) \to (0, \infty) \times [0, 2\pi)$,

$h(x, y) \to (r, \theta)$ là một song ánh.

Điểm gốc O là điểm duy nhất có $r = 0, \theta$ không xác định.

Mỗi điểm M trong mặt phẳng có duy nhất điểm $P(1, \theta)$ là giao điểm của tia OM với đường tròn đơn vị tâm O, sử dụng định nghĩa sin và cosin ta thấy :

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

Ngoài ra ta cũng có thể định nghĩa argument của số phức z như sau:

$$\forall z \neq 0, \cos\theta = \frac{\text{Re}z}{|z|}, \sin\theta = \frac{\text{Im}z}{|z|}$$

1.4.2 Biểu diễn lượng giác của số phức

Cho số phức $z = x = yi$ ta có thể viết z dưới dạng cực: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Đặt $\alpha = \theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$,khi đó $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Tức là với số phức z bất kỳ ta luôn viết được dưới dạng

$$z = r(\cos t + i\sin t), r \geq 0, t \in \mathbb{R}$$

1.4.3 Phép toán trong dạng lượng giác của số phức

Cho hai số phức $z_1, z_2 \neq 0$, có biểu diễn dạng lượng giác

$z_1 = r_1(\cos t_1 + i\sin t_1), z_2 = r_2(\cos t_2 + i\sin t_2)$ khi đó :

Hai số z_1, z_2 gọi là bằng nhau nếu nếu $r_1 = r_2$ và $t_2 - t_1 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tích hai số phức $z_1.z_2$ là số phức được xác định :

$$z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos(t_1+t_2) + i\sin(t_1+t_2)\right).$$

Định lý 1.4.1. *(De Moivre), Cho $z = r(\cos t + i\sin t)$ và $n \in \mathbb{N}$, khi đó ta có*

$$z^n = r^n(\cos nt + i\sin nt)$$

Chú ý : Công thức De Moivre vẫn đúng cho lũy thừa nguyên âm

Ngoài ra $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ còn được biểu diễn dưới dạng $z = re^{i\theta}$

Chương 2

CẤU TRÚC TÔPÔ CỦA MẶT PHẲNG PHỨC

Trong chương này tôi trình bày về sự hội tụ của dãy,các loại tập hợp các khái niệm đóng mở, bao đóng, điểm dính,...Các tính chất liên tục của hàm số biến phức.Đặc biệt là trong phần này tôi chứng tỏ được $\mathbb{C}$là không gian đủ.

2.1 Sự hội tụ của dãy và chuỗi phức

Định nghĩa 2.1.1. Dãy $\{z_n\}$ gọi là hội tụ đến z nếu dãy số thực $|z_n - z|$ hội tụ về 0.Đó là $z_n \to z$ nếu$||z_n - z| \to 0$

Từ định nghĩa ta có được:$z_n \to z$ nếu và chỉ nếu Rez_n $\to$Rez và Imz_n $\to$Imz

Ví dụ 2.1.2. Xét sự hội tụ của các dãy sau:

1.$z^n \to 0$ nếu $|z| < 1$

2. $\frac{n}{n+i} \to 1$

Giải

1.Ta có $|z^n - 0| = |z|^n \to 0$

2.Ta có $\left|\frac{n}{n+i} - 1\right| = \left|\frac{-i}{n+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \to 0$

Định nghĩa 2.1.3. $\{z_n\}$ gọi là Chauchy nếu mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại số nguyên N sao cho $n, m > N$ kéo theo $|z_n - z_m| < \varepsilon$

Mệnh đề 2.1.4. $\{z_n\}$ *được gọi là hội tụ nếu và chỉ nếu* $\{z_n\}$ *là Cauchy.*

Chứng minh. Nếu $z_n \to z$ thì Rez_n $\to$ Rez,Imz_n $\to$ Imz, và do đó $\{\text{Re}z_n\}$,và $\{\text{Im}z_n\}$ là những dãy Cauchy.

Và từ :$|z_n - z_m| \leq |\text{Re}(z_n - z_m)| + |\text{Im}(z_n - z_m|$

$$= |\text{Re}z_n - \text{Re}z_m| + |\text{Im}z_n - \text{Im}z_m| \to 0, n, m \to \infty$$

Vậy$\{z_n\}$ là dãy Cauchy.

Ngược lại,nếu $\{z_n\}$ là dãy Cauchy trong đó các dãy $\{\mathrm{Re} z_n\}$ và $\{\mathrm{Im} z_n\}$ là những dãy số thực hiển nhiên cả hai dãy trên là hội tụ, vậy $\{z_n\}$ là dãy hội tụ.

$\square$

Từ kết quả của định lý trên ta suy ra rằng $\mathbb{C}$ là không gian đầy đủ.

Định nghĩa 2.1.5. Một chuỗi vô hạn $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ gọi là hội tụ nếu dãy tổng riêng được xác định bởi $S_n = z_1 + z_2 + ... + z_n$ hội tụ. Và giới hạn của S_n gọi là tổng của chuỗi .

Chú ý :

(i) Tổng và hiệu của hai chuỗi hội tụ là hội tụ

(ii) Điều kiện cần cho chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ hội tụ là $z_n \to 0, n \to \infty$

(iii) Điều kiện đủ cho chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ hội tụ là chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| hit$

2.2 Phân loại tập hợp

Định nghĩa 2.2.1. Giả sử S là tập con bất kỳ của $\mathbb{C}$.

(i) Hình tròn mở tâm z_0 bán kính r>0 là tập hợp những điểm z trong mặt phẳng $D(z_0; r) = \{z : |z - z_0| < r$

(ii) $D(z_0; r)$ còn gọi là lân cận của điểm $z - 0$.

(iii) Một tập S gọi là mở nếu mọi điểm $z \in S$ tồn tại số $\delta > 0$ sao cho $D(z; \delta) \subset S$.

(iv) Một tập gọi là đóng nếu phần bù của nó là tập mở, ngoài ra ta còn phát biểu khác nữa đó là : Tập S gọi là đóng nếu $\{z_n \subset S, z_n \to z$ thì $z \in S$

(v) Một điểm a gọi là điểm trong của tập S nếu tồn tại hình tròn mở tâm a nằm trong S

(vi) Một điểm b gọi là điểm biên của S nếu mỗi hình tròn mở tùy ý tâm b chứa một điểm trong S và một điểm không nằm trong S.

vii Một điểm c gọi là điểm giới hạn của S nếu mọi hình tròn mở tâm c chứa một điểm của S khác c.

viii Một điểm d gọi là điểm cô lập của S nếu nó nằm trong S và tồn tại hình tròn mở tâm d không chứa điểm nào của Sngoài d.

Định nghĩa 2.2.2. Tập hợp các điểm biên của tập S gọi là biên của S và ký hiệu là ∂S, tập hợp các điểm trong của S gọi là phần trong của tập S ký hiệu là $\mathrm{Int}S$hoặc S^0 ,tập hợp những điểm trong và điểm biên gọi là bao đóng của tập S và ký hiệu là $\bar{S}$.

Một tập gọi là bị chặn nếu nó chứa trong một hình tròn $D(0, M), M > 0$.

Tập đóng và bị chặn gọi là compact.

Định nghĩa 2.2.3. Hai tập $X, Y \in \mathbb{C}$ gọi là tách nếu tồn tại hai tập mở rời nhau A, B sao cho $X \in A, Y \in B$, một tập $W \in \mathbb{C}$ gọi là liên thông nếu không tồn tại hai tập tách và khác rỗng có hợp bằng$W$.

Miền là tập mở liên thông.

2.3 Hàm liên tục

Định nghĩa 2.3.1. Một hàm số biến số phức xác định trên lân cận của điểm z_0 gọi là liên tục tại z_0 nếu $z_n \to z_0$ thì $f(z_n) \to f(z_0)$., f gọi là liên tục trên miền D nếu mỗi dãy $\{z_n\} \in D, z \in D$ sao cho$z - n \to z$ ta có $f(z_n) \to f(z)$

Nếu chúng ta chia f thành hai phần, phần thực và phần ảo thì :

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

với mọi u, v là hai biến thực. Dễ thấy rằng f liên tục nếu u và v là hàm liên tục theo hai biến (x, y).Ví dụ đa thức

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x^k y^j$$

là liên tục trên toàn mặt phẳng.

Tương tự

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

là liên tục trên toàn mặt phẳng trừ điểm gốc $z = 0$.Từ đó ta cũng có kết quả như sau:

Tổng ,hiệu, tích , thương (khác 0) của những hàm liên tục là liên tục, ta nói hàm $f \in \mathbf{C}^n$ nếu và chỉ nếu đạo hàm riêng từng phần cấp n của f là liên tục.

Một chuỗi hàm $\{f_n\}$ gọi là liên tục từng điểm trên D nếu mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $n > N$ suy ra $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ với mọi $z \in D$

Định lý 2.3.2. *Giả sử hàm $u(x, y)$ có đạo hàm riêng u_x và u_y không đổi tại mọi điểm trên D thì u là hàm hằng trên D.*

KẾT LUẬN

Trong phần nội dung chính của tiểu luận, tôi đã chứng minh được $\mathbb{C}$ là trường đóng đại số và là không gian đủ, tuy còn nhiều vấn đề cần trình bày về trường số phức nữa nhưng với nội dung của bài tiểu luận tôi dừng lại ở tính chất liên tục của hàm số biến số phức .

Tôi nghĩ rằng đây là tài liệu tham khảo thú vị cho những người quan tâm đến nó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Hà Huy Khoái, ***Tài liệu giải tích phức và ứng dụng***

2. Joseph Bak , Donald J.Newman, ***Complex Analysis***

3. Titu andreescu, Dorinandrica, ***Complex numbers from A to Z***