BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

****

HÀ DUY NGHĨA

PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

CAO HỌC TOÁN KHÓA 11
Chuyên ngành: **Đại số và lý thuyết số**

TIỂU LUẬN GIẢI TÍCH HÀM 3

CÁN BỘ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. ĐINH THANH ĐỨC

Quy nhơn, Tháng 6 năm 2009

MỤC LỤC

Trang phụ bìa i

Mục lục 1

Lời mở đầu 3

Chương 1 Kiến thức cơ sở 4

1.1 Các không gian cơ sở 4

1.1.1 Không gian $\mathbb{R}^n$ 4

1.1.2 Không gian $L_P(\mathbb{R}^n)$ 4

1.1.3 Không gian $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ 5

1.1.4 Không gian $C_0(\mathbb{R}^n)$ 5

1.1.5 Không gian hàm cơ bản $\mathcal{D}(\Omega)$ 5

1.1.6 Không gian hàm suy rộng $\mathcal{D}'(\Omega)$ 6

1.1.7 Không gian hàm suy rộng giảm nhanh $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 6

1.1.8 Không gian hàm suy rộng tăng chậm $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 7

1.2 Một số tính chất và định lý 7

1.2.1 Tích chập 7

1.2.2 Định lý Fubini 8

Chương 2 Phép biến đổi Fourier trong không gian $L_1(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n)$ 9

2.1 Phép biến đổi Fourier trong không gian $L_1(\mathbb{R}^n)$ 9

2.1.1 Định nghĩa và ví dụ 9

2.1.2 Một số tính chất 11

2.2 Phép biến đổi Fourier trong $L_2(\mathbb{R}^n)$ 13

2.2.1 Phép biến đổi Fourier 13

2.2.2 Định lý Plancherel 14

Chương 3 Phép biến đổi Fourier trong không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 16

3.1 Phép biến đổi Fourier 16

3.1.1 Phép biến đổi Fourier trong không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 16

3.1.2 Phép biến đổi Fourier trong không gian $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ 18

3.2 Các định lý Paley-Wienr 19

kết luận 21

Tài liệu tham khảo 22

LỜI MỞ ĐẦU

Lý thuyết Fourier đã được ứng dụng mạnh mẽ trong toán học hiện đại cũng như một số lĩnh vực khoa học khác. Và đặc biệt dùng phép biến đổi Fourier để giải phương trình đạo hàm riêng , phương trình vi phân,...,là một trong những ứng dụng thú vị mà đã được nhiều nhà toán học quan tâm. Tiểu luận này tôi nghiên cứu một số tính chất cơ bản của phép biến đổi Fourier như tính tuyến tính ,tính liên tục,.. cũng như các tính mở rộng trong các hàm ruy rộng.

Tiểu luận này bao gồm 3 chương :

Chương 1 : Những kiến thức cơ sở

Chương 2 : Phép biến đổi Fourier trong không gian $L_1(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n)$

Chương 3 : Phép biến đổi Fourier trong không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Trong mỗi chưng nội dung được trình bày như sau:

Chương 1 :Giới thiệu sơ lược về những kiến thức liên quan đến tiểu luận

Chương 2 :Chính thức đi vào phần cụ thể ,từ những định nghĩa ,ví dụ tính chất, đến nhữnh định lý ,....,.Đăc biệt là những tính chất được làm sáng tỏ qua các ví dụ.

Chương 3 :Là sự mở rộng của phép biến đổi trong không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ nên trong phần này bao gồm những tính chất mở rộng của chương 2.

Mặc dù bản thân đã rất cố gắng và được sự hướng dẫn nhiệt tình của thầy giáo hướng dẫn, nhưng do năng lực của bản thân và thời gian còn hạn chế nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn TS .Đinh Thanh Đức người đã tận tình giúp đỡ, cùng tập thể lớp cao học toán khoá 11 tạo điều kiện cho tôi hoàn thành tiểu luận này.

Tác giả

Chương 1

KIẾN THỨC CƠ SỞ

Trong chương này, tôi trình bày các kiến thức cơ bản có liên quan và sử dụng trong tiểu luận

Các kiến thức trong chương này được tôi trích dẫn trong các tài liệu tham khảo .

1.1 Các không gian cơ sở

1.1.1 Không gian $\mathbb{R}^n$

Không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ là không gian vector trên trường số thực mà mỗi phần tử của nó đều có dạng $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$.

Tích vô hướng của hai phần tử $x, y \in \mathbb{R}^n$ là một số được xác định bởi

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

Chuẩn của x trong $\mathbb{R}^n$ được xác định bởi

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

Chuẩn này gọi là chuẩn Euclide.

1.1.2 Không gian $L_P(\mathbb{R}^n)$

Tập hợp $L_P(\mathbb{R}^n)$ tất cả các hàm số xác định và đo được trên $\mathbb{R}^n$,sao cho

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty (*)$$

Trong $L_P(\mathbb{R}^n)$ hai hàm được gọi là đồng nhất với nhau nếu chúng bằng nhau hầu khắp nơi, do đó các phần tử của $L_P(\mathbb{R}^n)$ là lớp tương đương các hàm đo được thỏa mãn (*) , hàm tương đương nếu chúng bằng nhau hầu khắp nơi trên $L_P(\mathbb{R}^n)$và $f \in L_P(\mathbb{R}^n) f = 0$ nếu $f(x) = 0$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$ Khi đó $L_P(\mathbb{R}^n)$ là không gian vector với phép cộng hai hàm số và phép nhân một số với hàm số. Chuẩn trong $L_P(\mathbb{R}^n)$ được định nghĩa như sau

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} (**)$$

Khi đó $L_P(\mathbb{R}^n)$ cùng với chuẩn (**) là không gian định chuẩn .

1.1.3 Không gian $L_\infty(\mathbb{R}^n)$

Một hàm số fđo được trên $\mathbb{R}^n$ được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số $k$sao cho $|f(x)| \leq k$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$. Cận dưới lớn nhất các hằng số k được gọi là essential supremun của $|f|$ trên $\mathbb{R}^n$, và ký hiệu là $ess \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |\mathrm{f(x)}|$

Ta ký hiệu $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ là không gian vector gồm tất cả các hàm fbị chặn trên $\mathbb{R}^n$,các hàm này đồng nhất với nhau nếu chúng bằng nhau hầu khắp nơi.

Phiếm hàm $\|.\|_\infty$ được xác định bởi $\|f\|_\infty = ess \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |\mathrm{f(x)}|$, được gọi là chuẩn trong $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

1.1.4 Không gian $C_0(\mathbb{R}^n)$

Không gian $C_0(\mathbb{R}^n)$ là không gian của các hàm số fl iên tục hội tụ về 0 khi $x \to \infty$, với chuẩn xác định trong $C_0(\mathbb{R}^n)$là $\|f\| = \mathop{Sup}\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$

1.1.5 Không gian hàm cơ bản $\mathcal{D}(\Omega)$

Không gian $\mathcal{D}(\Omega)$ là không gian gồm các hàm $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ với các khái niệm hội tụ như sau:

Dãy $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ gồm các hàm trong $C_0^\infty(\Omega)$ được gọi là hội tụ đến hàm $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ nếu :

(i) Có một tập compact $K \subset \Omega$ mà sao cho supp$\varphi_j \subset K, j = 1, 2..$

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty} \sup\limits_{x\in\Omega} |D^\alpha\varphi_j(x) - D^\alpha\varphi(x)| = 0, \forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$

Khi đó ta viết là $\varphi = D_- \lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j$.

1.1.6 Không gian hàm suy rộng $\mathcal{D}'(\Omega)$

Ta nói rằng f là một hàm suy rộng trong Ω nếu f là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{D}(\Omega)$.

Tập tất cả các hàm suy rộng trên Ω lập thành không gian $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Hàm suy rộng $f\ in\mathcal{D}'(\Omega)$ tác động lên mỗi $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ được viết là $\langle f, \varphi\rangle$.

Hai hàm suy rộng $f, g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ được gọi là bằng nhau nếu

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle, \forall\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Đạo hàm suy rộng cấp α của hàm suy rộng f trong Ω ký hiệu la $D^\alpha f$ là ánh xạ từ $\mathcal{D}(\Omega)$vào$\mathbb{C}$ được xác định bởi $D^\alpha f : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha\varphi\rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

1.1.7 Không gian hàm suy rộng giảm nhanh $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Không gian các hàm giảm nhanh $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ là tập hợp

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \middle| \left|x^\alpha D^\beta\varphi(x)\right| < c_{\alpha\beta}, \forall x \in R^n, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\right\}.$$

Dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ được gọi là hội tụ đến $\varphi\ in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nếu

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta\varphi_k(x) - x^\alpha D^\beta\varphi(x)\right| = 0, \forall\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Khi đó ta viết $\mathcal{S}_- \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$

Dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ trong $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ được gọi là Cauchy trong $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nếu một trong hai điều kiện sau đây xảy ra :

(i) $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1 + \|x\|^2\right)^m |D^\beta\varphi_k(x) - x^\alpha D^\beta\varphi_l(x)| = 0, \forall\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

(ii) $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ l\to\infty}} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1+\|x\|^2\right)^m \sum\limits_{\beta\le m} \left|D^\beta\varphi_k(x) - x^\alpha D^\beta\varphi_l(x)\right| = 0$

Không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ là không gian đủ.

1.1.8 Không gian hàm suy rộng tăng chậm $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Cho hàm suy rộng $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Hàm suy rộng $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gọi là hàm suy rộng tăng chậm nếu có một số tự nhiên m và một số dương c sao cho

$$|\langle f,\varphi\rangle| \le c.\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\|x\|^2\right)^m \sum_{|\alpha|\le m} |D^\alpha\varphi(x)|, \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Không gian các hàm suy rộng tăng chậm $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ đóng với các phép toán tuyến tính, phép nhân với một hàm $a(.) \in C^\infty(\mathbb{R}^n$ và với mỗi $\alpha \in Z_+^n$ đều có một số tự nhiên m và số dương c để $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha a(x)| \le c.\left(1+\|x\|^2\right)^m$ và phép lấy đạo hàm suy rộng D^α.

Cho $f_k, f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), k = 1, 2...$ Dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ được gọi là hội tụ trong $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ đến f viết $\mathcal{S}'_-\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ nếu :

(i) Có một số tự nhiên m và số dương C sao cho

$$|\langle f_k,\varphi\rangle| \le C.\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(1+\|x\|^2\right)^m \sum_{|\alpha|\le m} |D^\alpha\varphi(x)|, \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

(ii) Dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ hội tụ đến f trong $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Cho $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Khi đó , dãy $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ khi và chỉ khi với mỗi $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dãy $\{\langle f_k,\varphi\rangle\}_{k=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $\mathbb{C}$.

1.2 Một số tính chất và định lý

1.2.1 Tích chập

Cho hai hàm $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ khi đó tích

$$f * g(x) = \int\limits_{R^n} f(x-y)g(y)dy = \int\limits_{R^n} f(y)g(x-y)dy$$

xác định với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ và $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, gọi là tích chập của hàm f theo hàm g.

Nếu $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ hoặc $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ thì tích chập của hàm suy rộng f theo hàm φ là hàm ký hiệu $f * \varphi$ được xác định như sau

$$f * \varphi : x \to (f * \varphi)(x) = \langle f, \varphi_x \rangle , \varphi_x(y) = \varphi(x - y).$$

1.2.2 Định lý Fubini

Nếu $f(x,y) \in L_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ và với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ hầu khắp nơi ta có $f(x,.) \in L_1(\mathbb{R}^m$, và với mọi $y \in \mathbb{R}^m$ hầu khắp nơi ta có $f(.,y) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, thì tồn tại tích phân $\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x,y)dx \in L_1(\mathbb{R}^m, \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x,y)dy \in L_1(\mathbb{R}^n$ và ta có

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy \right) dx.$$

Chương 2

PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER TRONG KHÔNG GIAN $L_1(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n)$

Trong chương này, tôi trình bày phép biến đổi Fourier của các hàm trong $L_1(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n)$, chỉ ra được mối liên hệ giữa phép biến đổi Fourier và phép biên đổi tuyến tính, mà cụ thể trong $L_2(\mathbb{R}^n)$ phép biến đổi Fourier là toán tử ***Unitary*** .

2.1 Phép biến đổi Fourier trong không gian $L_1(\mathbb{R}^n)$

2.1.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 2.1.1. Cho $f \in L_1(\mathbb{R}^n$,phép biến đổi Fourier của f là hàm $\hat{f}$ được xác định bởi

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t).e^{-2\pi ix.t}dt \tag{2.1}$$

Trong đó $x, t \in \mathbb{R}^n$, Tích $x.t = \langle x, t\rangle$ là tích vô hướng của hai phần tử trong $\mathbb{R}^n$.

Từ (2.1) nếu đặt $x = \frac{\omega}{2\pi}$ thì ta cũng có cách viết khác của phép biến đổi như sau

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t).e^{-i\langle\omega,t\rangle}dt. \tag{2.2}$$

Định nghĩa 2.1.2. Cho $\hat{f}(x)$ là phép biến đổi Fourier của hàm f , khi đó tích phân

$$f(t) = \int\limits_{R^n} \hat{f}(x)e^{2\pi ix.t}dx \tag{2.3}$$

Gọi là phép biến đổi ngược của phép biến đổi Fourier.

Định nghĩa 2.1.3. Nếu μ là một độ đo trong $\mathbb{R}^n$ ta cũng định nghĩa $\hat{\mu}$ như sau

$$\hat{\mu}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.t} d\mu(t)$$

Ví dụ 2.1.4. Cho $f(x) = e^{-4\pi|x|^2}, g(x) = e^{-2\pi|x|}$, hãy tính $\hat{f}(x), \hat{g}(x)$

Theo định nghĩa ta có :

1. $\hat{f}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi|x|^2} e^{-2ixt} dx = \prod\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\pi^2 x_j^2} e^{-2\pi i x_j t_j} dx_j$

$= \prod\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\pi\left(x_j - \frac{i.t_j}{4}\right)^2} e^{-\pi t_j^2} \Big/ 4$

$= \prod\limits_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} e^{-\pi.t_j^2/4}\right)$

$= 2^{-n} e^{-\pi|t|^2/4}.$

2. $\hat{g}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|} e^{-2\pi i t y} dy$

Để tính tích phân này ta áp dụng

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\pi} e^{-\beta^2/4u} du$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} . e^{-4\pi^2|y|^2 / 4u} du\right\} e^{-2\pi.i.ty}\right] dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left\{\int\limits_{En} e^{-4\pi|y|^2 / 4u} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{ity}} \mathrm{dy}\right\} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left\{\left(\sqrt{\frac{u}{\pi}}\right)^{n/2} e^{-u|t|^2}\right\} du \\
&= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-u} u^{(n-1)/2} e^{-u|t|^2} du \\
&= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-s} s^{(n-1)/2} ds \\
&= \frac{\Gamma\left[\frac{(n+1)}{2}\right]}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{\left(1+|t|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}.
\end{aligned}$$

2.1.2 Một số tính chất

Định lý 2.1.5. ***1.*** *Ánh xạ* $A : L_1(\mathbb{R}^n) \to L_\infty(\mathbb{R}^n)$

$$f \mapsto \hat{f}$$

là ánh xạ tuyến tính bị chặn và $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.

2. *Nếu* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *thì liên tục đều trong* $\mathbb{R}^n$*)*

Chứng minh. **1.** Giả sử $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n), \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, ta có :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(\alpha\mathrm{f}+\beta\mathrm{g}) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\alpha f + \beta g)(t)e^{-2\pi ix.t}dt \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha f(t)e^{-2\pi ix.t}dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \beta g(t)e^{-2\pi ix.t}dt \\ &= \alpha\hat{f}(x) + \beta\hat{g}(\mathrm{x}) = \alpha\mathrm{A}(\mathrm{f}) + \beta\mathrm{A}(\mathrm{g}). \end{aligned}$$

Vậy A tuyến tính.

Ta có :$\left\|\hat{f}\right\| = ess.\sup\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(x)\right| = ess.\sup\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi ixt}f(t)dt\right|$

$$\leq ess.\sup_{\mathbb{R}^n}\left|e^{-2\pi ixt}\right|\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)dt\right|.$$

$$\leq ess\,.\sup_{\mathbb{R}^n}\left|e^{-2\pi ixt}\right|\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(t)|\,dt \leq M\,\|f\|_1\,.$$

Vậy A bị chặn.

Chứng minh $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Ta có:$\left\|\hat{f}\right\|_\infty = ess.\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\hat{f}(x)\right| \leq ess.\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\left|e^{-2\pi ixt}\right|\|f\|_1$

Vì $ess.\sup\limits_{\mathbb{R}^n}\left|e^{-2\pi ixt}\right| \leq 1$ Nên $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.

2. Theo định nghĩa chuẩn trong $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, và theo **(1)** ta suy ra được điều phải chứng minh. □

Định lý 2.1.6. *Nếu* $f \in L_p(\mathbb{R}^n), (1 \leq p \leq \infty), g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *thì* $h = f * g$ *hoàn toàn xác định và* $h \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *hơn nữa* $\|h\|_p \leq \|f\|_p\|g\|_1$.

Chứng minh. Ta có :$\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|h(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\right\}^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$

Áp dụng bất đẳng thức Mincoxki và định lý Fubini ta được:

$$\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|h(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}|g(y)|\,dy$$

$$\leq \|f\|_p \|g\|_1 \qquad \square$$

Định lý 2.1.7. *Nếu* $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *thì*

(a) $(\Gamma_h f)^\wedge(x) = e^{-2\pi i h.x}\hat{f}(x)$

trong đó Γ_h *là toán tử được xác định bởi* :$(\Gamma_h f)(x) = f(x-h), \forall x, h \in \mathbb{R}^n$

(b) $\left[e^{2\pi i t.h} f(t)\right]^\wedge = (\Gamma_h \hat{f})(x)$.

(c) $(f * g)^\wedge = \hat{f}.\hat{g}$

(d) *Nếu* $\lambda > 0$ *và* $h(x) = f(x/\lambda)$ *thì* $\hat{h}(t) = \lambda^n \hat{f}(\lambda t)$

Chứng minh.

(a) $$(\Gamma_h f)^\wedge(x) = [f(x-h)]^\wedge(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t-h)e^{-2\pi i x.t}dt$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i x.(u+h)}du = e^{-2\pi i x.h}\hat{f}(x).$$

(b) $$\left(e^{2\pi i t.h} f(t)(x)\right)^\wedge = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[e^{2\pi i t.h} f(t)\right] e^{-2\pi i x.t}dt$$
$$= \int\limits_{R^n} e^{-2\pi i(x-h)} f(t)dt = \left(\Gamma_h \hat{f}\right)(x)$$

(*c*) Ta có $$(f * g)^\wedge = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{R^n} \left(\int\limits_{R^n} f(t-y)g(y)dy\right).e^{-2\pi i x.t}dt$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(g(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u).e^{-2\pi i x(u+y)}du\right)dy$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y).e^{-2\pi i x y}dy \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u).e^{-2\pi i x u}du\right)$$
$$= \hat{f}.\hat{g}.$$

(*d*) Ta có $$\hat{h}(t) = \int\limits_{R} h(x)e^{-2\pi t.x}dx$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)e^{-2\pi t.x}dx$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lambda f(u)\, e^{-2\pi t.\lambda u}du$$
$$= \lambda^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u)\, e^{-2\pi\lambda t.u}du = \lambda^n f^\wedge(\lambda t) \qquad \square$$

2.2 Phép biến đổi Fourier trong $L_2(\mathbb{R}^n)$

2.2.1 Phép biến đổi Fourier

Với không gian $L_2(\mathbb{R}^n)$ gồm các hàm bình phươngkhả tích cho nên nó không nhất thiết là thuộc $L_1(\mathbb{R}^n)$ Do đó phép biến đổi Fourier trong $L_1(\mathbb{R}^n)$ có thể không tồn tại vì vậy phép biến đổi Fourier trong $L_2(\mathbb{R}^n)$ có phần khác hơn.Người ta cũng đã chứng minh được đó chính là phép biến đổi tuyến tính trong $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Với hàm $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ta có định lý sau :

Định lý 2.2.1. *Nếu $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ thì* $\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$

Chứng minh. Gọi $g(x) = \overline{f(-x)} \in L_2(\mathbb{R}^n)$,khi đó $h = f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ và $\hat{h} = \hat{f}.\hat{g}$,và theo cách đặt trên thì $\hat{g} = \hat{f} \Rightarrow \hat{h} = \left|\hat{f}\right|^2$

Mặt khác ta cũng có $\hat{h} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ và $h(0) = \int\limits_{R^n} \hat{h}(x)dx$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \int\limits_{R^n} \left|\hat{f}\right|^2 dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(x)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)g(0-x)dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx. \text{ Từ đó suy ra: } \left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2 . \end{aligned}$$

□

Nhận xét :Định lý này cho ta thấy phép biến đổi Fourier là một toán tử tuyến tính bị chặn trên tập con trù mật $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, vì vậy ta có thể mở rộng lên toàn không gian $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Định nghĩa 2.2.2. Nếu $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ thì phép biến đổi Fourier của hàm $f$là giới hạn của dãy $\left\{\hat{h}_k\right\}$ trong đó $\{h_k\}$, là dãy trong $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ hội tụ về f.

Và phép biến đổi Fourier của hàm $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ được ký hiệu là $\mathcal{F}f = \hat{f}$.

Ví dụ 2.2.3. Từ định nghĩa ta thấy nếu chọn dãy $\{h_k\}$ như sau: $h_k(t) = f(t), \forall |t| \le k$ và bằng không với những giá trị khác thì

$$h_k(t) \to f(t), k \to \infty \text{ và } \mathcal{F}f = \hat{f}(x) = \lim_{k\to\infty} \hat{h}(x) \text{ ,trong đó}$$

$$\hat{h}_k(x) = \int\limits_{|t|\leq k} f(t)e^{-2\pi ixt}dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h_k(t)e^{-2\pi ixt}dt$$

2.2.2 Định lý Plancherel

Định lý 2.2.4. *Phép biến đổi Fourier trong $L_2(\mathbb{R}^n)$ là một toán tử* ***Unitary****.*

Chứng minh. Gọi $L = \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}^n Rn) : \hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n Rn) \right\}$.

Trước hết ta chứng minh L trù mật trong $L_1(\mathbb{R}^n) \cup L_p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ và

$$\{\bar{\hat{g}} : g \in\} = L$$

Ta có:$L \subset L_\infty(\mathbb{R}^n) \cup L_1(\mathbb{R}^n)$ do đó với mỗi $f \in L$ ta đều có

$$\int\limits_{E_n} |f(x)|^p \, dx \leq \|f\|_\infty^{p-1} \|f\|_1$$

Suy ra $L \subset L_p(\mathbb{R}^n)$.

Bây giờ ta xét dãy $f * \varphi_\varepsilon$ trong đó $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, dễ chứng minh được $f * \varphi_\varepsilon \in L$

và ta có : $(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)) = \int\limits_{E_n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t).dt - \int\limits_{E_n} f(x)\varphi_\varepsilon(t).dt$
$= \int\limits_{E_n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t).dt - \int\limits_{E_n} f(x)\varphi_\varepsilon(t).dt.$

Suy ra:$\|(f.\varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_P = \left(\int\limits_{E_n} \left| \int\limits_{E_n} [f(x-t) - f(x)]\,\varphi_\varepsilon(t).dt \right|^p dx \right)^{1/p}$
$\leq \int\limits_{E_n} \left(\int\limits_{E_n} |f(x-\varepsilon t) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} |g(y)|\, dy$

Điều này suy ra : $f * \varphi_\varepsilon \to f$ theo chuẩn $\|.\|_p$, hay L trù mật trong L_p

Ngoài ra $\hat{\hat{\bar{g}}} = \int\limits_{E_n} \overline{\hat{g}(t)}e^{-2\pi ix.t}dt = \int\limits_{E_n} \overline{\hat{g}(t)e^{2\pi ix.t}dt} = \overline{g(x)}$

Do đó $\left\{ \hat{\hat{\bar{g}}} : g \in L \right\} = L$

Khi đó $\psi : L_1 \to L_2, \psi(f) = \hat{f}$, là một phép đẳng cự.

cho nên tồn tại một mở rộng$\mathcal{F}$ của ψ trên $L_2(\mathbb{R}^n)$ là phép đẳng cự.

Gọi $\mathcal{L} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}(f(x)) = \mathcal{F}((f - x))$, thì $\mathcal{L}$ cũng là phép đẳng cự và $\mathcal{L} \circ \mathcal{F} = i_d$, Vậy $\mathcal{L}, \mathcal{F}$ là song ánh, hay $\mathcal{F}$ là toán tử ***Unitary***.

Bây giờ ta phải chứng tỏ $\mathcal{F}$ chính là phép biến đổi Fourier trong $L_2(\mathbb{R}^n) \cup L_1(\mathbb{R}^n)$ thật vậy với $f \in L_2(\mathbb{R}^n) \cup L_1(\mathbb{R}^n), g \in L$ ta có

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x).\overline{\hat{g}(x)}dx = \langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(x).\overline{\hat{g}(x)}dx.$$

$$\text{Vậy } \mathcal{F}f = \hat{f}, \forall f \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

□

Từ định lý trên ta có một hệ quả rất quan trọng sau đây gọi là công thức ***Parseval***.

Hệ quả 2.2.5. *Giả sử $f(t), g(t)$ là hai hàm thuộc $L_2(\mathbb{R}^n)$ và $\mathcal{F}f, \mathcal{G}g$ là 2 phép biến đổi Fourier của f và g khi đó*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{g(t)} = \int\limits_{E_n} \mathcal{F}f\mathcal{G}g dx$$

Định lý 2.2.6. *Phép biến đổi ngược của phép biến đổi $\mathcal{F}$ là*

$$(\mathcal{F}^{-1}(g))(x) = (\mathcal{F}g)(-x), \forall g \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Định lý **(2.2.4),(2.2.6)** gọi là định lý ***Plancherel*** .

Chương 3

PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER TRONG KHÔNG GIAN $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Trong chương này, tôi trình bày phép biến đổi Fourier của các hàm thuộc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, định nghĩa phép biến đổi Fourier ở dạng (2.2),Các tính chất tương tự trong L_1, L_2.

3.1 Phép biến đổi Fourier

3.1.1 Phép biến đổi Fourier trong không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Định nghĩa 3.1.1. Cho $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, biến đổi Fourier của hàm φ ký hiệu là $\mathcal{F}f$ là hàm được xác định bởi

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int\limits_{R^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)dx$$

và phép biến đổi Fourier ngược của hàm φ ký hiệu $\mathcal{F}^{-1}\varphi$ được xác định bởi

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int\limits_{R^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)dx.$$

Nhận xét : $\left|e^{-i\langle x,\xi\rangle}\right| = \left|e^{i\langle x,\xi\rangle}\right| = 1$ và $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ nên phép biến đổi Fourier$\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}^{-1}\varphi$ xác định trên $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 3.1.2. Cho $\varphi(x) = e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$ khi đó phép biến đổi Fourierφ là

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \prod_{k=1}^{n} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_k\xi_k - \frac{x_k^2}{2}} dx_k = \prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{\xi_k^2}{2}} (2\pi)^{\frac{-1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x_k - i\xi_k)^2} dx_k.$$

Dễ thấy $(2\pi)^{\frac{-1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x_k-i\xi_k)^2} dx_k = 1$ nên

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi) = \varphi(\xi).$$

Mệnh đề 3.1.3. (i) *Cho* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Khi đó* $\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}^{-1}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *và*

$$D^\alpha \mathcal{F}\varphi(\xi) = (-i)^|\alpha|\mathcal{F}(x^\alpha\varphi(x))(\xi), D^\alpha\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi) = (-i)^|\alpha|\mathcal{F}^{-1}(x^\alpha\varphi(x))(\xi).$$

$$\xi^\alpha\mathcal{F}\varphi(\xi) = (-i)^|\alpha|\mathcal{F}(D^\alpha\varphi(x))(\xi), \xi^\alpha\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi) = (-i)^|\alpha|\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha\varphi(x))(\xi).$$

(ii) $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \varphi$.

(iii) *Với* $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *ta có*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\varphi(x)\psi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi)F\psi(\xi)d\xi.$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}\varphi(\xi)|^2\, d\xi.$$

(iv) *Với* $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *ta có*

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi)(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}\varphi(\xi)\mathcal{F}\psi(\xi)$$

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) * \mathcal{F}\psi(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}(\varphi(x)\psi(x))(\xi)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi * \psi)(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi)\mathcal{F}^{-1}\psi(\xi)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(\xi) * \mathcal{F}^{-1}\psi(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}^{-1}(\varphi(x)\psi(x))(\xi)$$

Chứng minh. (i) Giả sử $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ta có :

$$\begin{aligned}\xi^\alpha\mathcal{F}\varphi(\xi) &= D_\xi^\alpha((2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int\limits_{R^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)dx)\\ &= (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int\limits_{R^n} (-ix)^\alpha e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)dx = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha\varphi(x))(\xi).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi^\alpha F\varphi(\xi) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} (iD_x)^\alpha e^{i\langle x,\xi\rangle}\varphi(x)dx\\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-iD_x)^\alpha\varphi(x)dx\\ &= (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(D^\alpha\varphi)(\xi)\end{aligned}$$

(ii) Với $\varphi, \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ta có :

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\varphi(\xi)\psi(\xi)d\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{R^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\varphi(y)dy\right)\mathcal{F}\psi(\xi)d\xi\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathcal{F}\psi(\xi)\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\varphi(y)dy\right)d\xi.\end{aligned}$$

Nên theo định lý Fubini ta suy ra

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} \mathcal{F}\psi(\xi) d\xi \right) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\xi\rangle} \mathcal{F}\varphi(\xi) d\xi \right) dy$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\psi)(x-y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi)(x-y)dy$$

Chọn $\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}, \psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \varepsilon > 0$,ta có

$$\mathcal{F}\psi_\varepsilon(\xi) = \mathcal{F}^{-1}\psi_\varepsilon(\xi) = \psi_\varepsilon(\xi)$$

nên

$$\int\limits_{R^n} \varphi(y)\psi_\varepsilon(x-y)dy = \int\limits_{R^n} \psi_\varepsilon(y)F^{-1}\left(F\varphi\right)(x-y)dy$$

Từ đó suy ra khi $\varepsilon \to 0$ ta được $\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi)(x)$.

Vậy $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi) = \varphi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, do đó$\mathcal{F}$ là đẳng cấu tuyến tính trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ với ánh xạ ngược$\mathcal{F}^{-1}$.

Các tính chất (iii)và (iv) suy trực tiếp từ định lý Fubini. □

Ngoài ra các tính chất của định lý (2.17) vẫn đúng cho các hàm $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, cụ thể ta có mệnh đề sau đây .

Mệnh đề 3.1.4. *Một số tính chất của phép biến đổi Fourier.*

(i) $\mathcal{F}\varphi(\xi - h) = \mathcal{F}[e^{ihx}\varphi(x)](\xi), \xi, h \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\mathcal{F}[varphi(x-h)] = e^{-ihx}\mathcal{F}\varphi(\xi)\xi, h \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\mathcal{F}[\varphi(tx)](\xi) = |t|^{-n}\mathcal{F}\varphi\left(\frac{\xi}{t}\right), t \neq 0, \xi, \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(iv) *Nếu* $A \in GL(\mathbb{R}^n$ *thì* $\mathcal{F}[\varphi(Ax)](\xi) = \frac{1}{|detA|}\mathcal{F}\varphi((A^{-1})^t\xi)$.

3.1.2 Phép biến đổi Fourier trong không gian $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Định nghĩa 3.1.5. Cho $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, . Biến đổi Fourier của hàm suy rộng f ký hiệu$\mathcal{F}f$ là hàm suy rộng tăng chậm được xác định bởi

$$\mathcal{F}f = \langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle .$$

Và phép biến đổi ngược $\mathcal{F}^{-1}f$ là hàm suy rộng tăng chậm được xác định bởi

$$\mathcal{F}^{-1}f = \left\langle \mathcal{F}^{-1}f, \varphi \right\rangle = \left\langle f, \mathcal{F}^{-1}\varphi \right\rangle.$$

Nhận xét : Phép biến đổi Fourier $\mathcal{F}$ và phép biến đổi ngược$\mathcal{F}^{-1}$ là ánh xạ tuyến tính liên tục trên $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

Ví dụ 3.1.6. Xét hàm $\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$ khi đó phép biến đổi $\mathcal{F}\delta$ là :

$\mathcal{F}\delta = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\xi)\mathcal{F}\varphi(\xi)d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\xi) \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, t \rangle}\varphi(t)dt \right) d\xi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$

Chọn $\varphi = 1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ta được :$\mathcal{F}\delta = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$.

Và do đó ta cũng có $\mathcal{F}1 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\delta$.

3.2 Các định lý Paley-Wienr

Cho$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ supp$\varphi \subset B_R(0)$, biến đổi Fourier$\mathcal{F}\varphi$ của hàm φ của hàm là hàm giảm nhanh, do $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa ta còn thác triển $\mathcal{F}\varphi$ lên $\mathbb{C}^n$.

$$\mathcal{F}\varphi : \varsigma \mapsto \mathcal{F}\varphi(\varsigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{B_R(0)} e^{-\langle x, \varsigma \rangle}\varphi(x)dx$$

với $\langle x, \varsigma \rangle = \sum_{k=1}^n x_k\varsigma_k = \sum_{k=1}^n x_k\xi_k + i\sum_{k=1}^n x_k\eta_k, \varsigma_k = \xi_k + i\eta_k$

Dễ thấy $\mathcal{F}\varphi(\zeta)$ là hàm khả vi vô hạn trên $\mathbb{C}^n$, ngoài ra ta có :

$$\begin{aligned} \varsigma^\alpha \mathcal{F}\varphi(\varsigma) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\|x\| \le R} e^{-i\langle x, \varsigma \rangle}(-iD)^\alpha\varphi(x)dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\|x\| \le R} e^{\langle x, \eta \rangle - i\langle x, \xi \rangle}(-iD)^\alpha\varphi(x)dx \end{aligned}$$

nên $|\varsigma^\alpha \mathcal{F}\varphi(\varsigma)| \le Ce^{R|\eta|}$

do đó với mỗi$N > 0$ đều có một số $C_N > 0$ sao cho

$$|\mathcal{F}\varphi(\varsigma)| \le C_N(1 + \|\varsigma\|^{-N} e^{R\|\mathcal{F}\varsigma\|}, \forall \varsigma \in C^n \qquad (3.1)$$

Tương tự ta có:$|D^\alpha \mathcal{F}\varphi(\varsigma)| = |\mathcal{F}x^\alpha \varphi(\varsigma)| \leq CR^{|\alpha|}e^{R\|\mathcal{F}\varsigma\|}, \forall \varsigma \in C$

nên $\mathcal{F}\varphi(\xi)$ là hàm giải tích trên$\mathbb{C}^n$.

Định lý Paley -Winer sẽ chứng minh (3.1) là điều kiện cần và đủ để một hàm giải tích trên $\mathbb{C}^n$ là biến đổi Fourier của hàm khả vi vô hạn có giá compact trên $\mathbb{R}^n$.

Định lý 3.2.1. *Cho $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ là hàm giải tích , khi đó điều kiện cần và đủ để có một số $R > 0$ một hàm $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,$supp\varphi \subset \bar{B}_R(0)$ sao cho $\psi(\zeta) = \mathcal{F}\varphi(\zeta)$ là tồn tại số R>0, với mỗi $N > 0$ đều có một số $C_N > 0$ sao cho*

$$|\psi(\varsigma)| < 0C_N\left(1 + \|\varsigma\|\right)^{-N} e^{R\|F\varsigma\|}, \forall \varsigma \in \mathbb{C}^n \tag{3.2}$$

Chứng minh. Điều kiện cần đã được chứng minh ở trên, ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Từ bất đẳng thức (3.2), tích phân $\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\zeta\in\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\psi(\xi)d\xi$

là xác định với mọi x, đồng thời nó là hàm khả vi theo x,do $\xi^\alpha.e^{i\langle x,\xi\rangle}$ là hàm có tích phân trên $\mathbb{R}^n$ hội tụ đều theo x, với mỗi $\eta \in \mathbb{R}^n$, do hàm $e^{-i\langle x,\zeta\rangle}\psi(\zeta)$ là hàm giải tích trên ,$\mathbb{C}^n$nên nó giải tích theo từng biến.Khi đó ta có :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\psi(\xi)d\xi\\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{i(x_1\varsigma_1+\sum_{j=2}^n x_j\xi_j)}\psi(\varsigma_1,\xi_2,..,)d\xi\\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi+i\eta\rangle}\psi(\xi+i\eta)d\xi.\end{aligned}$$

vì vậy , từ bất đẳng thức (3.2) ta có được $\psi(\xi+i\eta) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, do đó ta cũng có được :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\xi+i\eta) &= (2\pi)^{-n}\int_{x\in\mathcal{R}^n} e^{i\langle x,\xi+i\eta\rangle}\int_{\varsigma\in R^n}\psi(\varsigma+i\eta)d\varsigma dx\\ &= (2\pi)^{-n}\int_{x\in\mathcal{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\int_{\varsigma\in\mathcal{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\psi(\varsigma+i\eta)d\varsigma x dx\\ &= \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\left[\psi(\xi+i\eta)\right])(\xi) = \psi(\xi+i\eta)\end{aligned}$$

và $|\varphi(x)| \leq C_n e^{R\|\eta\|-\langle x,\eta\rangle}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n}(1+\|\xi\|)^{-n-1}d\xi$ mà $\int_{\xi\in\mathbb{R}^n}(1+\|\xi\|)^{-n-1}d\xi$ hội tụ và nếu $\|x\| > R, \eta = \frac{1}{t}x$ thì $\lim\limits_{t\to 0^+} e^{R\|\eta\|-\langle x,\eta\rangle} = 0$,nên $\varphi(x) = 0\ \|x\| > R$.

Vậy$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $supp\varphi \subset \bar{B}_R(0)$.

□

KẾT LUẬN

Trong phần nội dung chính của tiểu luận tôi đã trình bày tương đối đủ về phép biến đổi Fourier trong các không gian $L_1(\mathbb{R}^n), L_2(\mathbb{R}^n)$,và không gian các hàm suy rộng giảm nhanh ở vô cực.Các tính chất dược chứng minh rỏ ràng,với nhiều ví dụ mnh họa cụ thể. Tuy nhiên vẫn còn nhiều vấn đề chưa được trình bày, nhưng tôi hi vọng rằng tiểu luận này là tài liệu tham khảo thú vị cho những ai quan tâm đến nó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Rudin,Water,*Function Analysis*

2. Elias M.Stein , Guido Weiss .*Fourier Analysis on Euclidean Spaces*

3. Đặng Anh Tuấn, *Lý thuyết hàm suy rộng và không gian Sobolev*

4. B.Davies, *Intergral Transforms and their Applications*Springer-Verlay

5. Phan Đức Chính , *Giải tích hàm tập 1* Nxb Đại Học Sư Phạm 1978