MINISTRY OF EDUCATION AND TRAINING
QUY NHON UNIVERSITY

****

HA DUY NGHIA

SOME APPLICATIONS OF INEQUALITIES

MATHEMATICAL MASTER STUDENT
COURSE 11
Specializing in:**Algebra and Theory of numbers**

ENGLISH ESSAY FOR SPECIFIC PURPOSES

GUIDING TEACHER
Dr. TON NU MY NHAT

Quy nhon, june 2009

ASSURANCE

I assure that here are my results of studying and researches. Data and results shown in this essay are truthful, not copied from any sources.

Author

Ha Duy Nghia

CONTENTS

Sub cover page i

Assurance ii

Contents 1

Preface 2

Chương 1 SOME STANDARD INEQUALITIES **3**

1.1 Introduction 3

1.2 Bernoulli's Inequality 3

1.3 Young's Inequality 4

1.4 The Inequality of the Means 4

1.5 Hölder's Inequality 6

1.6 Minkowski's Inequality 9

1.7 The Cauchy-Schwarz Inequality 10

1.8 Chebyshev's Inequality 11

1.9 Jensen's Inequality 11

1.10 Exercises 13

Chương Chapter 2 SOME APPLICATIONS **15**

2.1 Introduction 15

2.2 Estimation 15

2.3 Applications to Matrices 16

Conclusion 19

Referrences 20

PREFACE

English plays a very integral part in our lives. I, a master student, consider it especially important because English provides an access to world scholarship and world trade.

To improve my English and understand more Applications of inequalities I translate my theme called " ***Some applications of inequalities***" from English to Vietnamese, basing on "***Inequalities :with applications to engineering***" by Michael J. Cloud and Byron C. Drachman .(enclosed).

There are two chapters in this essay :

Chapter I: Some standard inequalities.

Chapter II: Some applications.

Details in chapters:

Chapter I introduces some well-known inequalities in general aspects but often used, including some applied exercises.

Chapter II introduces two basic applications "Estimation of integrals" and "Inequalities related to eigenvalues".They are new but not common ones.

With whole-hearted guidance of my guiding teacher I have tried my best to finish my essay.However, due to my limited knowledge and lock of time, the essay is likely to contain mistakes.

I appreciate all comments and remarks from teacher and classmates, which help my essay become better.

I would like to thank Dr.Ton Nu My Nhat , who provides whole-heareted assistane, and all my friends for encouragement during the early stages of studying this essay.

Chương 1

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC CHUẨN

1.1 Giới thiệu

Trong chương này tôi giới thiệu các bất đẳng thức nổi tiếng và một số cách chứng minh đặc biệt các bất đẳng thức đó.Bắt đầu là bất đẳng thức Bernoulli.

1.2 Bất đẳng thức Bernoulli

Định lý 1.2.1. (Bất đẳng thức Bernoulli) *Nếu* $n \in \mathbb{N}$ *và* $x \geqslant 1$ *thì*

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \tag{1.1}$$

đẳng thức đúng khi n=1 hoặc x=0.

Chứng minh. Chúng ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Gọi $\mathcal{P}(n)$ là mệnh đề : $x \geqslant -1 \Rightarrow (1+x)^n \geqslant (1+nx)$, đẳng thức đúng khi $n=1$ hoặc $x=0$.

Ta có $\mathcal{P}(1)$ đúng.

Giả sử $\mathcal{P}(n), n+1 \neq 1$ đúng .Ta chứng minh $\mathcal{P}(n+1)$ đúng.

Thật vậy, ta có :

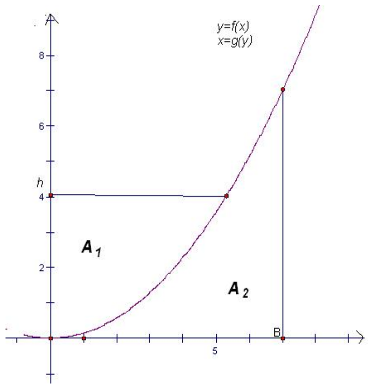
$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \Rightarrow \ (1+x)^{n+1} \geqslant (1+nx)(1+x)$$

$$\Rightarrow \ (1+x)^{n+1} = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x. \tag{1.2}$$

Đẳng thức (1.2) xảy ra nếu và chỉ nếu $nx^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. □

1.3 Bất đẳng thức Young

Xét hai hàm liên tục f và g cả hai tăng nghiêm ngặt và ngược nhau.Giả sử đầy đủ là hai hàm biến thiên có đồ thị đi qua gốc tọa độ như hình (h.1) . Dựa vào hình vẽ ta có diện tích $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ vượt quá diện tích của hình chữ nhật có chiều rộng ω và chiều cao h .



Hình 1.1: h1

Điều này dẫn đến kết quả trực tiếp sau đây.

Định lý 1.3.1. (**Bất đẳng thức Young**) *Gọi $f, g \in \mathbb{C}$ là hai hàm tăng nghiêm ngặt và ngược nhau, với argument không âm, sao cho $f(0) = g(0) = 0$. thì*

$$\omega h \leq \int_0^\omega f(x)dx + \int_0^h g(x)dx \tag{1.3}$$

đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $h = f(\omega)$

Một sự phân tích cách chứng minh là yêu cầu trong phần bài tập.

1.4 Bất đẳng thức của giá trị trung bình

Định lý 1.4.1. (**Bất đẳng thức Weighted AM-GM**) *Gọi $a_1, a_2, ..., a_n$ là những số dương và gọi $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ là số dương sao cho $\delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_n = 1$ thì*

$$\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + ... + \delta_n a_n \geqslant a_1^{\delta_1} ... a_n^{\delta_n} \tag{1.4}$$

đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu tất cả a_i là bằng nhau.

Chứng minh. Ta áp dụng một kết quả đã có từ trước là :$x - 1 - lnx \geqslant 0$ với mọi $x > 0$, đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $x = 1$.

Gọi
$$A = \sum_{k=1}^{n} \delta_k a_k.$$
Với mỗi i, $\frac{a_i}{A} - 1 - \ln \frac{a_i}{A} \geqslant 0$. Nhân mỗi số hạng bởi δ_i và lấy tổng theo i ta có
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta_i a_i}{a} - \delta_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \ln \left(\frac{a_i}{A} \right) \geq 0. \tag{1.5}$$

Từ
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta_i a_i}{A} - \delta_i \right) = 0$$
ta có
$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \ln \left(\frac{a_i}{A} \right) \leq 0.$$
Suy ra
$$\exp \left[\sum_{i=1}^{n} \delta_i \ln \left(\frac{a_i}{A} \right) \right] \leq \exp(0) = 1.$$
Do đó
$$\frac{a_1^{\delta_1} ... a_n^{\delta_n}}{A} \leq 1$$
hay
$$a_1^{\delta_1} ... a_n^{\delta_n} \leq \delta_1 a_1 + ... + \delta_n a_n. \tag{1.6}$$

Đẳng thức trong (1.6) xảy ra khi và chỉ khi đẳng thức trong (1.5) xảy ra, ta có
$$\frac{\delta_i a_i}{A} - \delta_i - \delta_i \ln \left(\frac{a_i}{A} \right) \geq 0, \forall i = 1, 2, .., n$$
nên đẳng thức trong (1.5) xảy ra nếu và chỉ nếu
$$\frac{\delta_i a_i}{A} - \delta_i - \delta_i \ln \left(\frac{a_i}{A} \right) = 0, \forall i = 1, 2, .., n$$
điều này tương đương với $\frac{a_i}{A} = 1$.

Vậy đẳng thức trong (1.6) xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$. □

Chọn $\delta_i = \frac{1}{n} \forall i = 1, 2, .., n$ ta có kết quả tiếp theo sau sau.

Hệ quả 1.4.2. (Bất đẳng thức Trung bình cộng và Trung bình nhân)

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là những số dương thì

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \geq (a_1...a_n)^{\frac{1}{n}} \tag{1.7}$$

đẳng thức xảy ra nếu tất cả các a_i là bằng nhau.

Ví dụ 1.4.3. áp dụng (1.7) các số nghịch đảo $\frac{1}{a_i}$ ta được

$$\frac{n}{a_1^{-1} + ... + a_1^{-1}} \leq (a_1...a_n)^{\frac{1}{n}}$$

Ví dụ 1.4.4. Một kỹ thuật đơn giản trong việc áp dụng (1.7) là xét tính tăng giảm của dãy $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Ta có

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .1 < \left[\frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1}\right]^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Do đó $a_n < a_{n+1}$ và a_n là dãy đơn điệu tăng.

1.5 Bất đẳng thức Höder

Định lý 1.5.1. (Bất đẳng thức Höder) *Giả sử với mỗi $j, 1 \leq j \leq n$, $a_{j1}, ..., a_{jm}$ là những số khác 0. Giả sử $\delta_1, ..., \delta_n$ là những số dương sao cho $\delta_1 + ... + \delta_n = 1$. Với mỗi j ta ký hiệu $S_j = \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ji}|$ khi đó*

$$\sum_{i=1}^{m} |a_{1i}|^{\delta_1} ... |a_{ni}|^{\delta_m} \leq S_1^{\delta_1} ... S_n^{\delta_n}. \tag{1.8}$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{m} |a_{1i}|^{\delta_1} ... |a_{ni}|^{\delta_m}}{S_1^{\delta_1} ... S_n^{\delta_n}} &= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{|a_{1i}|}{S_1}\right)^{\delta_1} ... \left(\frac{|a_{1i}|}{S_n}\right)^{\delta_1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \delta_1 \left(\frac{|a_{1i}|}{S_1}\right) + ... + \delta_n \left(\frac{|a_{1i}|}{S_n}\right) \\ &= \delta_1 + ... + \delta_n = 1 \end{aligned} \tag{1.9}$$

□

Với $n = 2$ với $\delta_1 = \frac{1}{p}, \delta_2 = \frac{1}{q}$ và $a_{1i} = |a_i|^p, a_{2i} = |b_i|^q \forall i = 1, ..., m$, khi đó(1.8) trở thành

$$\sum_{i=1}^{m} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.10}$$

Đây là trường hợp thông thường của bất đẳng thức Höder Một các khác để chứng minh định lý này là sử dụng bất đẳng thức Young . Bằng cách đặt $f(x) = x^{p-1}, g(x) = x^{q-1}$ với các lũy thừa bù nhau thỏa điều kiện

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p < \infty$$

Từ $(1, 3)$ cho ta

$$\omega h \leq \frac{\omega^p}{p} + \frac{h^q}{q}.$$

Với hai tập gồm m số $a_1, ..., a_m, vb_1, ..., b_m$, gọi

$\alpha = \left(\sum\limits_{j=1}^{m} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \beta = \left(\sum\limits_{j=1}^{m} |a_j|^q \right)^{\frac{1}{p}}$ Giả sử rằng α, β là những số khác 0 ta có

$$\frac{|a_i|}{\alpha} \frac{|b_i|}{\beta} \leq \frac{1}{p} \frac{|a_i|^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_i|^q}{\beta^q}.$$

với mỗi số nguyên dương i lấy tổng theo i ta được

$$\frac{1}{\alpha\beta} \sum_{i=1}^{m} |a_i| |b_i| \leq \frac{1}{p\alpha^p} \sum_{i=1}^{m} |a_i|^p + \frac{1}{q\beta^q} \sum_{i=1}^{m} |b_i|^p = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Cho $m \to \infty$ ta được

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

với điều kiện là hai chuỗi ở vế phải hội tụ.

Một kết quả tương ứng cho tích phân với điều kiện tích phân tồn tại là

$$\int_a^b |f(x).g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.11}$$

Vấn đề tiếp theo là ta nghiên cứu đẳng thức xảy ra trong bất đẳng thức Hölder, chú ý rằng nếu $\alpha_i \geq 0$ với tất cả i thì $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$ nếu và chỉ nếu mỗi $\alpha_i = 0$.

Nếu $\alpha_i \geq \beta_i$ với tất cả i thì $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i$ nếu và chỉ nếu $\alpha_i = \beta_i$ với mọi i.

Vì vậy đẳng thức trong (1.9) xảy ra nếu và chỉ nếu với mỗi i

$$\left(\frac{|a_{1i}|}{S_1}\right)^{\delta_1} ... \left(\frac{|a_{1n}|}{S_n}\right)^{\delta_n} = \delta_1 \frac{|a_{1i}|}{S_1} + ... + \delta_n \frac{|a_{1i}|}{S_n} \tag{1.12}$$

Từ bất đẳng thức Weighted AM-GM ta có (1.12) đúng nếu và chỉ nếu

$$\frac{|a_{1i}|}{S_1} = ... = \frac{|a_{1i}|}{S_n} \tag{1.13}$$

Do đó đẳng thức trong (1.8) xảy ra nếu và chỉ nếu (1.13) đúng với mọi i

Trong trường hợp $n = 2$ đẳng thức(1.10) xảy ra nếu và chỉ nếu

$$\frac{|a_i|^p}{\sum\limits_{i=1}^{m} |a_i|^p} = ... = \frac{|b_i|^p}{\sum\limits_{i=1}^{m} |b_i|^p} \tag{1.14}$$

Bây giờ ta xét đến việc giảm các điều kiện mỗi a_{ji} là khác 0. Nếu $a_{j1} = ... = a_{jm} = 0$ thì dễ kiểm tra được (1.8) là đúng. Giả sử tập $a_{j1}, ..., a_{jm} = 0$ chứa ít nhất một số hạng khác 0, với mỗi chỉ số i trong (1.9) vẫn đúng đó là

$$\left(\frac{|a_{1i}|}{S_1}\right)^{\delta_1} ... \left(\frac{|a_{1n}|}{S_n}\right)^{\delta_n} \leq \delta_1 \frac{|a_{1i}|}{S_1} + ... + \delta_n \frac{|a_{1i}|}{S_n}$$

Tương tự (1.9) ta cũng kiểm tra được (1.10) vẫn đúng . Bây giờ chúng ta tổng quát việc nghiên cứu ứng dụng (1.10) như sau :

Định lý 1.5.2. (Bất đẳng thức Hölder). *Cho $p > 1, q > 1$ và $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Cho $a_1 ... a_m$ và $b_1 ... b_m$ là hai dãy số thực , khi đó*

$$\sum_{i=1}^{m} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{m} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu một trong hai dãy a_i hoặc b_i bao gồm toàn bộ phần tử 0 hoặc là

$$\frac{|a_i|^p}{\sum\limits_{i=1}^{m} |a_i|^p} = ... = \frac{|b_i|^p}{\sum\limits_{i=1}^{m} |b_i|^p}$$

với tất cả i

1.6 Bất đẳng thức Minkowski

Định lý 1.6.1. (Bất đẳng thức Minkowski) *Giả sử rằng $a_1...a_n$ và $b_1...b_n$ là những số thực và $p > 1$. Khi đó*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.15}$$

Chứng minh. Nếu $p = 1$ điều này được suy ra từ bất đẳng thức trong tam giác. Bây giờ giả sử $p > 1$, và chọn $q > 1$ sao cho $p^{-1} + q^{-1} = 1$, áp dụng bất đẳng thức Hölder cho các số $\alpha_i = |a_i|$ và $\beta_i = |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}}$ và $\alpha_i = |b_i|$ và $\beta_i = |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}}$ ta được

$$\sum_{i=1}^{m} |a_i|\, |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.16}$$

và

$$\sum_{i=1}^{m} |b_i|\, |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.17}$$

Từ $p = 1 + \frac{p}{q}$,và với mỗi i ta có

$$\begin{aligned} |a_i + b_i|^p &= |a_i + b_i|\, |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \\ &\leq |a_i|\, |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} + |b_i|\, |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Lấy tổng trên từng số hạng trong (1.18) và sử dụng (1.17), (1.18) ta được $\sum\limits_{i=1}^{m} |a_i + b_i|^p \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ $, = \left[\left(\sum\limits_{i=1}^{m} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ Với giả thiết $\sum\limits_{i=1}^{m} |a_i + b_i|^p \neq 0$ ta suy ra được điều phải chứng minh.

Điều kiện để đẳng thức xảy ra xem như bài tập. □

Bất đẳng thức Minkowski có thể mở rộng cho chuỗi vô hạn và cho tích phân. Với chuỗi hội tụ ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Với điều kiện các tích phân sau tồn tại ta cũng có

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.7 Bất đẳng thức Cauchy-Schwaz

Định lý 1.7.1. (Bất đẳng thức Cauchy-Schwaz) *Giả sử $a_1...a_m$ và $b_1...b_m$ là những số thực không âm .Khi đó*

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^m b_i^2\right) \tag{1.19}$$

đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu tất cả a_i là bằng 0 hoặc tất cả a_i là bằng 0 hoặc

$$a_j = \sqrt{\frac{\sum a_i^2}{\sum b_j^2} b_j}, \forall j$$

Chứng minh. Trong bất đẳng thức Hölder chọn $p = q = 2$, Chúng ta sử dụng chú ý phần trước của bất ẳng thức bậc hai như sau.

Nếu $a_i = 0, \forall i$ thì (1.19) là hiển nhiên đúng.

Nếu có ít nhất $a_i \neq 0$ nào đó khác 0, thì với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có

$$\sum_{i=1}^m (a_i x + b_i)^2 \ge 0$$

hoặc

$$g(x) = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \ge 0$$

với mọi

$$\alpha = \sum_{i=1}^m a_i^2 \qquad \beta = \sum_{i=1}^m a_i b_i \qquad \gamma = \sum_{i=1}^m b_i^2$$

Do đó , biểu thức $\Delta = \beta^2 - \alpha\gamma \le 0$ thay α, β, γ từ trên vào biểu thức Δ ta được (1.19) .Vậy định lý được chứng minh. □

1.8 Bất đẳng thức Chebyshev

Định lý 1.8.1. (Bất đẳng thức Chebyshev) *Gọi a_i và b_i là hai bộ sắp thứ tự tương tự sao cho*

$$\begin{cases} a_1 \leq ... \leq a_m \\ b_1 \leq ... \leq b_m \end{cases} \text{hoặc} \quad \begin{cases} a_1 \geq ... \geq a_m \\ b_1 \geq ... \geq b_m \end{cases} \text{Khi đó}$$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \geq \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} b_i\right)$$

đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $a_1 = ...a_m$ hoặc $b_1 = ... = b_m$.

Chứng minh. Theo giả thiết ta thấy cả hai trường hợp là tương đương nhau, với mỗi cách chọn i, j ta đều có $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ lấy tổng theo i và j ta được

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$$

khai triển ta được

$$\sum_{i=1}^{m} a_i b_i \sum_{j=1}^{m}(1) - \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i=1}^{m} b_i + \sum_{j=1}^{m} a_j b_j \sum_{i=1}^{m}(1) \geq 0$$

rút gon ta được

$$2m\sum_{i=1}^{m} a_i b_i - 2\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{m} b_j \geq 0$$

suy ra điều phải chứng minh. □

1.9 Bất đẳng thức Jensen

Mottj hàm $(f(x)$ được gọi là lồi trên khoảng $(a; b)$ nếu và chỉ nếu bất đẳng thức

$$f(px_1 + (1-p)x_2) \leq pf(x_1) + (1-p)f(x_2) \tag{1.20}$$

đúng với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$ và với $p \in (0; 1)$ Trong trường hợp bất đẳng thức xảy ra thật sự với $x_1 \neq x_2$ ta nói f là hàm lồi thật sự trong khoảng $(a; b)$ Chúng ta chú ý rằng mỗi $x_p \in (x_1; x_2)$ có thể biểu thị như :$x_p = x_1 + (1-p)(x_2 - x_1) = px_1 + (1-p)x_2$ với $p \in (0;1)$.Đường thẳng nối hai điểm $(x_1; f(x_1))$ và $(x_2; f(x_2))$ là

$$f_s(x) = f(x_1) + \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right](x - x_1)$$

do vậy $f_s(x_p) = pf(x_1) + (1-p)f(x_2)$

Về mặt hình học thì điều kiện của hàm số lồi là đồ thị của nó đi lên nằm phía trên đường thẳng nối hai điểm tùy ý của nó .

Ngoài ra ta cũng có điều kiện để hàm f lồi trên khoảng $(a;b)$ là $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a;b)$.

Định lý 1.9.1. (Bất đẳng thức Jensen) *Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $(a;b)$ và $x_1, x_2, ..., x_m$ là m điểm trong khoảng $(a;b)$, Ngoài ra cho $c_1, ..., c_m$ là những hằng số không âm sao cho $c_1 + ... + c_m = 1$, khi đó*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i f(x_i) \tag{1.21}$$

Nếu f là hàm thật sự lồi và mỗi $c_i > 0$ thì đẳng thức xảy ra nếu và chie nếu $x_1 = ...x_m$

Chứng minh. trước hết chúng ta xét trường hợp $c_m < 1$ và chứng minh bằng quy nạp.

Với $m = 2$ (1.21) đúng vì theo tính chất lồi của hàm f và nếu $x_1 = x_2$ thì đẳng thức xảy ra và nếu f là hàm thật sự lồi tất cả các $c_i > 0$ và đẳng thức trong (1.21) xảy ra điêuù cần phải có là $x_1 = x_2$,

Bây giờ giả sử định lý đúng cho $m = k$ và giả sử $c_1 + ... + c_{k+1} = 1$, do f là hàm lồi nên ta có

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} c_i x_i\right) &= f\left((1 - c_{k+1})\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1 - c_{k+1}} x_i + c_{k+1} x_{k+1}\right) \\ &\leq (1 - c_{k+1})\, f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1 - c_{k+1}} x_i\right) + c_{k+1} f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

Từ các số $\frac{c_i}{1-c_{k+1}}$,$1 \leq i \ \leq k$ có tổng bằng 1ta cũng có được :

$$f\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{1-c_{k+1}}x_i \leq \frac{1}{1-c_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}c_if(x_i) \tag{1.22}$$

do đó với $m = k+1, (1.21)$ đúng

Nếu $x_1 = .. = x_{k+1}$ thì dễ kiểm tra được đẳng thức trong (1.21) xảy ra. Bấy giờ giả sử đẳng thức trong (1.21) đúng , f là hàm thật sự lồi và tất cả $c_i > 0$ thì đẳng thức trong (1.22) đúng . Do đó, với giả sử định lý đúng cho k số $x_1 = ...x_k$ thay vào (1.21) ta được kết quả

$$f\left(\left(\sum_{i=1}^{k}c_i\right)x_1 + c_{k+1}x_{k+1}\right) = \left(\sum_{i=1}^{k}c_i\right)f(x_1) + c_{k+1}f(x_{k+1})$$

Vậy ta đã chứng minh được định lý trong trường hợp $c_m < 1$. Với $c_m = 1$ suy ra $c_1 = ...c_m = 0$ khi đó (1.21) trở thành $f(x_m) \leq f(x_m)$, hiển nhiên đúng $\square$

Ví dụ 1.9.2. Hàm $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ là hàm lồi tong khoảng $(0, \infty)$, do đó với mọi $x, y > 0$ ta có

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n+y^n}{2}$$

1.10 Bài tập

Bài 1.10.1 Xây dựng cách chứng minh bất đẳng thức Young

Bài 1.10.2 Giả sử $a, b, c, d > 0$ cứng minh các kết quả sau ;

(a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$

(b) $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$

(c) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

(d) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$

(d) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

Bài 1.10.3 Sử dụng bất đẳng thức AM-GM chứng tỏ rằng

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Ngoài ra nếu n là số tự nhiên lớn hơn 1 thì $(2n-1)!! < n^n$ và $(n+1)^n > 2n!!$ trong đó $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)...5.3.1$,và $(2n)!! = (2n)(2n-2)...4.2$

Bài 1.10.4 Một áp dụng đơn giản của bất đẳng thức AM-GM đó là : Chứng tỏ rằng trong các hình chữ nhật có cùng diện tích hình vuông là hình có chu vi nhỏ nhất .

Chương Chapter 2

MỘT SỐ ỨNG DỤNG

2.1 Giới thiệu

Trong phần này tôi xin giới thiệu một vài ứng dụng nhỏ tương đối hay, được trích trong 10 ứng dụng của sách " *Inequalities:With Applications to Engineering* ", đó là phần ước lượng tích phân và các bất đẳng thức liên quan đến giá trị riêng của ma trận.Cụ thể được trình bày như sau:

2.2 Ước lượng tích phân

Ví dụ 2.2.1. Xét tích phân $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^5}dx$

Ta có hàm dưới dấu tích phân nhận giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ là 1 và $\sqrt{2}$, do đó $1 \leq I \leq \sqrt{2}$, tuy nhiên,áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwaz ta được

$$\int\limits_0^1 \left|\sqrt{1+x^5}\right| dx \leq \sqrt{\int\limits_0^1 \left(1+x^5\right) dx} = \frac{7}{6} \approx 1.167$$

Vậy $1 \leq I \leq \frac{7}{6}$ Suy ra $I \approx 1.075$

Ví dụ 2.2.2. Cho hai hàm $(f(t), g(t)$ xác định trên $(-\infty;\infty)$ tích chập của $f(t), g(t)$ viết $f(t) * g(t)$ được xác định như sau $f(t) * g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx$ với điềukiện tích phân là tồn tại, hàm $f * g$ là bị chặn nếu cả hai hàm $f(t), g(t)$ là bình phương khả tích trong $-\infty; +\infty$ áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwaz ta có:

$$\begin{aligned} |f(t) * g(t)|^2 &= \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx\right)^2 \\ &\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(t-x)|^2 dx \end{aligned}$$

Hiền nhiên $|f(t) * g(t)| < +\infty, \forall t$ và $f * g$ là bị chặn

Ví dụ 2.2.3. Biểu thức dưới dấu tích phân của tích phân

$$I = \int_2^5 e^x(x+1)dx$$

là tích của những hàm số tăng trong đoạn $[2;5]$, do đó theo Bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$I \geq \frac{1}{3}\int_2^5 e^x dx \int_2^5 (x+1)dx = \frac{9}{5}(e^5 - e^2) \approx 635$$

Ngoài ra theo bất đẳng thức Cauchy-Schwaz ta cũng có :

$$I \leq \sqrt{\int_2^5 e^{2x}dx \int_2^5 (x+1)^2 dx} \approx 832$$

Vậy giá trị của tích phân I là gần bằng 727

2.3 Áp dụng cho ma trận

Lý thuyết trận và đại số tuyến tính chứa một vài vấn đề liên quan đến bất đẳng thức .

Cho một ma trận phức vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Một liên hệ quan trọng đó là ma trận liên hợp $A^\dagger$ của ma trận A

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{n1} & \cdots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Trong các số hạng của tích trong , nếu $x, y \in \mathbb{C}^n$ thì $\langle x, Ay\rangle = \langle A^{\dagger}x, y\rangle$.

Ma trận Ađược gọi là tự liên hợp nếu $A = A^{\dagger}$.

Tiếp theo chúng ta sẽ đề cập đến ra một số tính chất bất đẳng thức liên quan đến giá trị riêng của ma trận A. Gọi tất cả các giá trị riêng $\lambda_1, ..., \lambda_n$ của ma trận A là những đại lượng vô hướng thỏa mãn $Ax = \lambda_i x$ với một vài véctơ cột của x là khác không.

Chú ý trước hết là nếu λ là một giá trị riêng của ma trận A thì λ là một số thực , Thật vậy giả sử λ là giá trị riêng ứng với các véc tơ riêng x thì ,

$$\langle x, x\rangle \overline{\lambda} = \langle x, \lambda x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle$$

Vì $\langle x, x\rangle \neq 0$ nên $\lambda = \overline{\lambda}$. Vậy λ phải là số thực. Trong trường hợp A là ma trận thực thì liên hợp nghĩa là đối xứng tức là $a_i j = aji \forall i, j$

Bây giờ giả sử λ_1, λ_2 là hai giá trị riêng khác nhau của ma trận A với hai véc tơ riêng tương ứng x_1, x_2 khi đó x_1, x_2 là trực giao nhau.

Một vài định lý sau đây rất có ích.

Định lý 2.3.1. *Gọi A là ma trận thực vuông đối xứng , Giả sử các giá trị riêng thực $\{\lambda_i\}$ thỏa mãn $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$. Dạng toàn phương được xác định bởi $Q(x) = \langle x, Ax\rangle$ Khi đó với mọi $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_n \|x\|^2 .$$

Chứng minh. Gọi $\{x_1, .., x_n\}$ là nhữn véc tơ riêng tương ứng, giả sử mỗi x_i thỏa mãn $\|x_1\| = 1$ dễ dàng có được hệ $\{x_1, .., x_n\}$ là hệ trực giao ,hiển nhiên nó là đập lập tuyến tính , vì vậy nó là cơ sở . Do đó tồn tại hệ số $\{c_i\}$ sao cho $x = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$

Khi đó

$$Q(x) = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, A \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_j^2 \lambda$$

Vì vậy

$$Q(x) \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$$

Tương tự ta cũng có :$\lambda_1 \|x\|^2 \leq Q(x)$ □

Định lý 2.3.2. (Sylvester's Criterion) *Gọi A là ma trận thực đối xứng vuông cấp n, dạng toàn phương được định nghĩa bởi* $Q(x) = x^T Ax = \langle x, Ax\rangle \forall x \in \mathbb{R}^n$ *là xác định dương nếu và chỉ nếu các định thức*

$$|a_{11}|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

tất cả đều dương .

Chứng minh. Theo tính chất đại số tuyến tính, một ma trận được gọi là xác định dương nếu $x^T Ax > 0, \forall x \neq 0$. Xét trường hợp $n = 2$, Giả sử Q(x) xác định dương , đó là $Q(x) > 0$ nếu $x \neq 0$, chọn $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, khi đó $Q(x) = a_1 1 > 0$. Bây giờ chọn $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Bởi vì $x \neq 0$, ta có $Q(x) = a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1 + a_{22} > 0, \forall x_1$ Điều này là luôn đúng vì ta có

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

□

Định lý 2.3.3. (Đạo hàm cấp 2 của hàm chuẩn n biến) *Gọi U là tập mở trong*$\mathbb{R}^n$*, gọi* $f(x) \in C^2(U)$*.,gọi* $x_0 \in U$ *và giả sử* $f'(x_0) = 0$*và* $f''(x_0)$ *là xác định dương. Khi đó* $f(x)$ *đạt cực tiểu địa phương tại* x_0 *tức là có một số dương* δ *sao cho nếu* $0 < \|x - x_0\| < \delta$ *thì* $f(x) > f(0)$

Việc chứng minh dành cho bạn đọc.

CONCLUSION

With the main contents of the essay, I've demons traded most of the mentioned inequalities and made some applications such as "***Estimation of integral and inequalities related to eigenvalues***" become clear . Although a few properties are not proved in this essay, it is generally, a mathematically interesting knowledge and useful reference for those who are interested in it.

REFERRENCES

1. Đặng Hùng Thắng, *Từ điển toán học Anh Việt*

2. Michael J.Cloud, Byron C. Drachman,*Inequalities:With Applications to Engineering*